I. Guía Pedagógica del Módulo Manejo de espacios y cantidades

Contenido

1. Descripción

La Guía Pedagógica es un documento que integra elementos técnico-metodológicos planteados de acuerdo con los principios y lineamientos del **Modelo Académico de Calidad para la Competitividad** del Conalep para orientar la práctica educativa del Prestador de Servicios Profesionales (PSP) en el desarrollo de competencias previstas en los programas de estudio.

La finalidad que tiene esta guía es facilitar el aprendizaje de los alumnos, encauzar sus acciones y reflexiones y proporcionar situaciones en las que desarrollará las competencias. El PSP debe asumir conscientemente un rol que facilite el proceso de aprendizaje, proponiendo y cuidando un encuadre que favorezca un ambiente seguro en el que los alumnos puedan aprender, tomar riesgos, equivocarse extrayendo de sus errores lecciones significativas, apoyarse mutuamente, establecer relaciones positivas y de confianza, crear relaciones significativas con adultos a quienes respetan no por su estatus como tal, sino como personas cuyo ejemplo, cercanía y apoyo emocional es valioso.

Es necesario destacar que el desarrollo de la competencia se concreta en el aula, ya que **formar con un enfoque en competencias significa crear experiencias de aprendizaje para que los alumnos adquieran la capacidad de movilizar, de forma integral, recursos que se consideran indispensables para saber resolver problemas en diversas situaciones o contextos,** e involucran las dimensiones cognitiva, afectiva y psicomotora; por ello, los programas de estudio, describen las competencias a desarrollar, entendiéndolas como la combinación integrada de conocimientos, habilidades, actitudes y valores que permiten el logro de un desempeño eficiente, autónomo, flexible y responsable del individuo en situaciones específicas y en un contexto dado. En consecuencia, la competencia implica la comprensión y transferencia de los conocimientos a situaciones de la vida real; ello exige relacionar, integrar, interpretar, inventar, aplicar y transferir los saberes a la resolución de problemas. Esto significa que **el contenido, los medios de enseñanza, las estrategias de aprendizaje, las formas de organización de la clase y la evaluación se estructuran en función de la competencia a formar**; es decir, el énfasis en la proyección curricular está en lo que los alumnos tienen que aprender, en las formas en cómo lo hacen y en su aplicación a situaciones de la vida cotidiana y profesional.

Considerando que el alumno está en el centro del proceso formativo, se busca acercarle elementos de apoyo que le muestren qué **competencias** va a desarrollar, cómo hacerlo y la forma en que se le evaluará. Es decir, mediante la guía pedagógica el alumno podrá **autogestionar su aprendizaje** a través del uso de estrategias flexibles y apropiadas que se transfieran y adopten a nuevas situaciones y contextos e ir dando seguimiento a sus avances a través de una autoevaluación constante, como base para mejorar en el logro y desarrollo de las competencias indispensables para un crecimiento académico y personal.

2. Datos de Identificación de la Norma

Título:	
Unidad (es) de competencia laboral: **1.**	
Código:	**Nivel de competencia:**

3. Generalidades Pedagógicas

Con el propósito de difundir los criterios a considerar en la instrumentación de la presente guía entre los docentes y personal académico de planteles y Colegios Estatales, se describen **algunas consideraciones** respecto al desarrollo e intención de las competencias expresadas en los módulos correspondientes a la formación básica, propedéutica y profesional.

Los principios asociados a la **concepción constructivista del aprendizaje** mantienen una estrecha relación con los de la **educación basada en competencias**, la cual se ha concebido en el Colegio como el enfoque idóneo para orientar la formación ocupacional de los futuros profesionales técnicos y profesionales técnicos bachiller. Este enfoque constituye una de las opciones más viables para lograr la vinculación entre la educación y el sector productivo de bienes y servicios.

En los programas de estudio se proponen una serie de contenidos que se considera conveniente abordar para obtener los **Resultados de Aprendizaje establecidos**; sin embargo, se busca que este planteamiento le dé al prestador de servicios profesionales la posibilidad de **desarrollarlos con mayor libertad y creatividad**.

En este sentido, se debe considerar que el papel que juegan el alumno y el prestador de servicios profesionales en el marco del Modelo Académico de Calidad para la Competitividad tenga, entre otras, las siguientes características:

El alumno:	El prestador de servicios profesionales:
❖ Mejora su capacidad para resolver problemas. ❖ Aprende a trabajar en grupo y comunica sus ideas. ❖ Aprende a buscar información y a procesarla. ❖ Construye su conocimiento. ❖ Adopta una posición crítica y autónoma. ❖ Realiza los procesos de autoevaluación y coevaluación.	❖ Organiza su formación continua a lo largo de su trayectoria profesional ❖ Domina y estructura los saberes para facilitar experiencias de aprendizaje significativo ❖ Planifica los procesos de enseñanza y de aprendizaje atendiendo al enfoque por competencias, y los ubica en contextos disciplinares, curriculares y sociales amplios ❖ Lleva a la práctica procesos de enseñanza y de aprendizaje de manera efectiva, creativa e innovadora a su contexto institucional Evalúa los procesos de enseñanza y de aprendizaje con un enfoque formativo Construye ambientes para el aprendizaje autónomo y colaborativo Contribuye a la generación de un ambiente que facilite el desarrollo sano e integral de los estudiantes ❖ Participa en los proyectos de mejora continua de su escuela y apoya la gestión institucional

En esta etapa se requiere una mejor y mayor organización académica que apoye en forma relativa la actividad del alumno, que en este caso es mucho mayor que la del PSP; lo que no quiere decir que su labor sea menos importante. **El PSP en lugar de transmitir vertical y unidireccionalmente los conocimientos, es un mediador del aprendizaje**, ya que:

- Planea y diseña experiencias y actividades necesarias para la adquisición de las competencias previstas. Asimismo, define los ambientes de aprendizaje, espacios y recursos adecuados para su logro.
- Proporciona oportunidades de aprendizaje a los estudiantes apoyándose en metodologías y estrategias didácticas pertinentes a los Resultados de Aprendizaje.
- Ayuda también al alumno a asumir un rol más comprometido con su propio proceso, invitándole a tomar decisiones.
- Facilita el aprender a pensar, fomentando un nivel más profundo de conocimiento.
- Ayuda en la creación y desarrollo de grupos colaborativos entre los alumnos.
- Guía permanentemente a los alumnos.
- Motiva al alumno a poner en práctica sus ideas, animándole en sus exploraciones y proyectos.

Considerando la importancia de que el PSP planee y despliegue con libertad su experiencia y creatividad para el desarrollo de las competencias consideradas en los programas de estudio y especificadas en los Resultados de Aprendizaje, en las competencias de las Unidades de Aprendizaje, así como en la competencia del módulo; **podrá proponer y utilizar todas las estrategias didácticas que considere necesarias** para el logro de estos fines educativos, con la recomendación de que fomente, preferentemente, las estrategias y técnicas didácticas que se describen en este apartado.

Al respecto, entenderemos como estrategias didácticas los planes y actividades orientados a un desempeño exitoso de los resultados de aprendizaje, que incluyen estrategias de enseñanza, estrategias de aprendizaje, métodos y técnicas didácticas, así como, acciones paralelas o alternativas que el PSP y los alumnos realizarán para obtener y verificar el logro de la competencia; bajo este tenor, **la autoevaluación debe ser considerada también como una estrategia por excelencia para educar al alumno en la responsabilidad y para que aprenda a valorar, criticar y reflexionar sobre el proceso de enseñanza y su aprendizaje individual**.

Es así como la selección de estas estrategias debe orientarse hacia un enfoque constructivista del conocimiento y estar dirigidas a que **los alumnos observen y estudien su entorno**, con el fin de generar nuevos conocimientos en contextos reales y el desarrollo de las capacidades reflexivas y críticas de los alumnos.

Desde esta perspectiva, a continuación se describen brevemente los tipos de aprendizaje que guiarán el diseño de las estrategias y las técnicas que deberán emplearse para el desarrollo de las mismas:

TIPOS APRENDIZAJES.

Significativo

Se fundamenta en una concepción constructivista del aprendizaje, la cual se nutre de diversas concepciones asociadas al cognoscitivismo, como la teoría psicogenética de Jean Piaget, el enfoque sociocultural de Vygotsky y la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel.

Dicha concepción sostiene que el ser humano tiene la disposición de **aprender verdaderamente sólo aquello a lo que le encuentra sentido** en virtud de que está vinculado con su entorno o con sus conocimientos previos. Con respecto al comportamiento del alumno, se espera que sean capaces de desarrollar aprendizajes significativos, en una amplia gama de situaciones y circunstancias, lo cual equivale a **"aprender a aprender"**, ya que de ello depende la construcción del conocimiento.

Colaborativo.

El aprendizaje colaborativo puede definirse como el conjunto de métodos de instrucción o entrenamiento para uso en grupos, así como de estrategias para propiciar el desarrollo de habilidades mixtas (aprendizaje y desarrollo personal y social). En el aprendizaje colaborativo **cada miembro del grupo es responsable de su propio aprendizaje, así como del de los restantes miembros del grupo** (Johnson, 1993.)

Más que una técnica, el aprendizaje colaborativo es considerado una filosofía de interacción y una forma personal de trabajo, que implica el manejo de aspectos tales como el **respeto a las contribuciones y capacidades individuales de los miembros del grupo** (Maldonado Pérez, 2007). Lo que lo distingue de otro tipo de situaciones grupales, es el desarrollo de la interdependencia positiva entre los alumnos, es decir, de una toma de conciencia de que **sólo es posible lograr las metas individuales de aprendizaje si los demás compañeros del grupo también logran las suyas**.

El aprendizaje colaborativo surge a través de transacciones entre los alumnos, o entre el docente y los alumnos, en un proceso en el cual cambia la responsabilidad del aprendizaje, del docente como experto, al alumno, y asume que el docente es también un sujeto que aprende. Lo más importante en la formación de grupos de trabajo colaborativo es vigilar que los elementos básicos estén claramente estructurados en cada sesión de trabajo. Sólo de esta manera se puede lograr que se produzca, tanto el esfuerzo colaborativo en el grupo, como una estrecha relación entre la colaboración y los resultados (Johnson & F. Johnson, 1997).

Los elementos básicos que deben estar presentes en los grupos de trabajo colaborativo para que éste sea efectivo son:

- la interdependencia positiva.
- la responsabilidad individual.
- la interacción promotora.
- el uso apropiado de destrezas sociales.

- el procesamiento del grupo.

Asimismo, el trabajo colaborativo se caracteriza principalmente por lo siguiente:

- Se desarrolla mediante **acciones de cooperación, responsabilidad, respeto y comunicación**, en forma sistemática, entre los integrantes del grupo y subgrupos.
- Va **más allá que sólo el simple trabajo en equipo** por parte de los alumnos. Básicamente se puede orientar a que los alumnos intercambien información y trabajen en tareas hasta que todos sus miembros las han entendido y terminado, aprendiendo a través de la colaboración.
- Se distingue por el desarrollo de una **interdependencia positiva entre los alumnos**, en donde se tome conciencia de que sólo es posible lograr las metas individuales de aprendizaje si los demás compañeros del grupo también logran las suyas.
- Aunque en esencia esta estrategia promueve la actividad en pequeños grupos de trabajo, se debe cuidar en el planteamiento de las actividades que **cada integrante obtenga una evidencia personal para poder integrarla a su portafolio de evidencias**.

Aprendizaje Basado en Problemas.

Consiste en la presentación de **situaciones reales o simuladas** que requieren la aplicación del conocimiento, en las cuales el **alumno debe analizar la situación y elegir o construir una o varias alternativas para su solución** (Díaz Barriga Arceo, 2003). Es importante aplicar esta estrategia ya que **las competencias se adquieren en el proceso de solución de problemas** y en este sentido, el alumno aprende a solucionarlos cuando se enfrenta a problemas de su vida cotidiana, a problemas vinculados con sus vivencias dentro del Colegio o con la profesión. Asimismo, el alumno se apropia de los conocimientos, habilidades y normas de comportamiento que le permiten la aplicación creativa a nuevas situaciones sociales, profesionales o de aprendizaje, por lo que:

- Se puede trabajar en forma individual o de grupos pequeños de alumnos que se reúnen a analizar y a resolver un problema seleccionado o diseñado especialmente para el logro de ciertos resultados de aprendizaje.
- Se debe presentar primero el problema, se identifican las necesidades de aprendizaje, se busca la información necesaria y finalmente se regresa al problema con una solución o se identifican problemas nuevos y se repite el ciclo.
- Los problemas deben estar diseñados para motivar la búsqueda independiente de la información a través de todos los medios disponibles para el alumno y además generar discusión o controversia en el grupo.
- El mismo diseño del problema debe estimular que los alumnos utilicen los aprendizajes previamente adquiridos.
- El diseño del problema debe comprometer el interés de los alumnos para examinar de manera profunda los conceptos y objetivos que se quieren aprender.
- El problema debe estar en relación con los objetivos del programa de estudio y con problemas o situaciones de la vida diaria para que los alumnos encuentren mayor sentido en el trabajo que realizan.
- Los problemas deben llevar a los alumnos a tomar decisiones o hacer juicios basados en hechos, información lógica y fundamentada, y obligarlos a justificar sus decisiones y razonamientos.

- Se debe centrar en el alumno y no en el PSP.

TÉCNICAS

Método de proyectos.

Es una técnica didáctica que incluye actividades que pueden requerir que los alumnos **investiguen, construyan y analicen información** que coincida con los objetivos específicos de una tarea determinada en la que se **organizan actividades desde una perspectiva experiencial**, donde el alumno aprende a través de la práctica personal, activa y directa con el propósito de aclarar, reforzar y construir aprendizajes (Intel Educación).

Para definir proyectos efectivos se debe considerar principalmente que:

- Los alumnos son el centro del proceso de aprendizaje.
- Los proyectos se enfocan en resultados de aprendizaje acordes con los programas de estudio.
- Las preguntas orientadoras conducen la ejecución de los proyectos.
- Los proyectos involucran múltiples tipos de evaluaciones continuas.
- El proyecto tiene conexiones con el mundo real.
- Los alumnos demuestran conocimiento a través de un producto o desempeño.
- La tecnología apoya y mejora el aprendizaje de los alumnos.
- Las destrezas de pensamiento son integrales al proyecto.

Para el presente módulo se hacen las siguientes recomendaciones:

- Integrar varios módulos mediante el método de proyectos, lo cual es ideal para desarrollar un trabajo colaborativo.
- En el planteamiento del proyecto, cuidar los siguientes aspectos:
    - ✓ Establecer el alcance y la complejidad.
    - ✓ Determinar las metas.
    - ✓ Definir la duración.
    - ✓ Determinar los recursos y apoyos.
    - ✓ Establecer preguntas guía. Las preguntas guía conducen a los alumnos hacia el logro de los objetivos del proyecto. La cantidad de preguntas guía es proporcional a la complejidad del proyecto.

- ✓ Calendarizar y organizar las actividades y productos preeliminares y definitivos necesarias para dar cumplimiento al proyecto.

- Las actividades deben ayudar a responsabilizar a los alumnos de su propio aprendizaje y a **aplicar competencias adquiridas** en el salón de clase **en proyectos reales**, cuyo planteamiento se basa en un problema real e **involucra distintas áreas**.
- El proyecto debe implicar que los alumnos **participen en un proceso de investigación**, en el que **utilicen diferentes estrategias de estudio**; puedan participar en el proceso de planificación del propio aprendizaje y les ayude a ser flexibles, reconocer al "otro" y comprender su propio entorno personal y cultural. Así entonces se debe favorecer el desarrollo de **estrategias de indagación, interpretación y presentación del proceso seguido**.
- De acuerdo a algunos teóricos, mediante el método de proyectos los alumnos buscan soluciones a problemas no convencionales, cuando llevan a la práctica el hacer y depurar preguntas, debatir ideas, hacer predicciones, diseñar planes y/o experimentos, recolectar y analizar datos, establecer conclusiones, comunicar sus ideas y descubrimientos a otros, hacer nuevas preguntas, crear artefactos o propuestas muy concretas de orden social, científico, ambiental, etc.
- En la gran mayoría de los casos los proyectos se llevan a cabo **fuera del salón de clase** y, dependiendo de la orientación del proyecto, en muchos de los casos pueden **interactuar con sus comunidades** o permitirle un **contacto directo con las fuentes de información** necesarias para el planteamiento de su trabajo. Estas experiencias en las que se ven involucrados hacen que aprendan a manejar y usar los recursos de los que disponen como el tiempo y los materiales.
- Como medio de evaluación se recomienda que todos los proyectos tengan **una o más presentaciones del avance para evaluar resultados** relacionados con el proyecto.
- Para conocer acerca del progreso de un proyecto se puede:
  - ✓ Pedir reportes del progreso.
  - ✓ Presentaciones de avance,
  - ✓ Monitorear el trabajo individual o en grupos.
  - ✓ Solicitar una bitácora en relación con cada proyecto.
  - ✓ Calendarizar sesiones semanales de reflexión sobre avances en función de la revisión del plan de proyecto.

Estudio de casos.

El estudio de casos es una técnica de enseñanza en la que los alumnos **aprenden sobre la base de experiencias y situaciones de la vida real**, y se permiten así, construir su propio aprendizaje en un contexto que los aproxima a su entorno. Esta técnica se basa en la participación activa y en procesos colaborativos y democráticos de discusión de la situación reflejada en el caso, por lo que:

- Se deben representar situaciones problemáticas diversas de la vida para que se estudien y analicen.

- Se pretende que los alumnos generen soluciones validas para los posibles problemas de carácter complejo que se presenten en la realidad futura.
- Se deben proponer datos concretos para reflexionar, analizar y discutir en grupo y encontrar posibles alternativas para la solución del problema planteado. Guiar al alumno en la generación de alternativas de solución, le permite desarrollar la habilidad creativa, la capacidad de innovación y representa un recurso para conectar la teoría a la práctica real.
- Debe permitir reflexionar y contrastar las propias conclusiones con las de otros, aceptarlas y expresar sugerencias.

El estudio de casos es pertinente usarlo cuando se pretende:

- Analizar un problema.
- Determinar un método de análisis.
- Adquirir agilidad en determinar alternativas o cursos de acción.
- Tomar decisiones.

Algunos teóricos plantean las siguientes fases para el estudio de un caso:

- **Fase preliminar:** Presentación del caso a los participantes
- **Fase de eclosión:** "Explosión" de opiniones, impresiones, juicios, posibles alternativas, etc., por parte de los participantes.
- **Fase de análisis:** En esta fase es preciso llegar hasta la determinación de aquellos hechos que son significativos. Se concluye esta fase cuando se ha conseguido una síntesis aceptada por todos los miembros del grupo.
- **Fase de conceptualización:** Es la formulación de conceptos o de principios concretos de acción, aplicables en el caso actual y que permiten ser utilizados o transferidos en una situación parecida.

Interrogación.

Consiste en llevar a los alumnos a la **discusión y al análisis de situaciones o información**, con base en preguntas planteadas y formuladas por el PSP o por los mismos alumnos, con el fin de explorar las capacidades del pensamiento al activar sus procesos cognitivos; se recomienda **integrar esta técnica de manera sistemática y continua** a las anteriormente descritas y al abordar cualquier tema del programa de estudio.

Participativo-vivenciales.

Son un conjunto de elementos didácticos, sobre todo los que exigen un grado considerable de **involucramiento y participación de todos los miembros del grupo** y que sólo tienen como límite el grado de imaginación y creatividad del facilitador.

Los ejercicios vivenciales son una alternativa para llevar a cabo el proceso enseñanza-aprendizaje, no sólo porque facilitan la transmisión de conocimientos, sino porque además permiten **identificar y fomentar aspectos de liderazgo, motivación, interacción y comunicación del grupo**, etc., los cuales son de vital importancia para la organización, desarrollo y control de un grupo de aprendizaje.

Los ejercicios vivenciales resultan ser una situación planeada y estructurada de tal manera que representan una experiencia muy atractiva, divertida y hasta emocionante. El juego significa apartarse, salirse de lo rutinario y monótono, para asumir un papel o personaje a través del cual el individuo pueda manifestar lo que verdaderamente es o quisiera ser sin temor a la crítica, al rechazo o al ridículo.

El desarrollo de estas experiencias se encuentra determinado por los conocimientos, habilidades y actitudes que el grupo requiera revisar o analizar y por sus propias vivencias y necesidades personales.

4. Enfoque del Módulo

Como en una sinfonía, donde el efecto final no sólo depende del texto musical, sino también de la maestría y ánimo de sus intérpretes, los programas de primer semestre son una invitación a los PSP´s de nuestra Institución para aplicar el Modelo Académico de Calidad para la Competitividad, retomando los objetivos de la educación, que en primera instancia son preparar al individuo para la vida, lo que no se logra sólo dando un nuevo enfoque al Modelo Académico, sino cambiando de manera radical el proceso de enseñanza-aprendizaje, propósito que sin su concurso no es realizable.

Los nuevos programas demandan un cambio sustantivo en las prácticas docentes, en donde el aprendizaje pasa a un primer plano, es decir, que el alumno es el protagonista del proceso educativo.

Como Institución, nos tomará algunos años el llegar a implementar los Planes de Estudio como soñamos, al ser un reto magno, de preparación y estudio, de confianza en la vocación formadora y facilitadora, y de firmeza en la gradual puesta en marcha de lo nuevo. La base de ello esta en que los Prestadores de Servicios Profesionales acepten el reto y mantengan la visión gratificante del trabajo comprometido y bien hecho.

Bajo este proyecto la intención del módulo **Manejo de espacios y cantidades** es promover en el alumno el desarrollo de habilidades de pensamiento requeridas para la realización de un diagnóstico de las propias necesidades, aprender y desaprender, lograr diferentes niveles de pensamiento y aprendizaje, generar nuevos conocimientos, regular las emociones, controlar y monitorear su propio desarrollo, resolver diferentes ejercicios, utilizando estrategias flexibles y apropiadas que se transfieren y adaptan a nuevas situaciones y contextos diversos, a lo largo de la vida. Además de crear en si mismo la capacidad de modelar bajo conceptos matemáticos las diversas situaciones que lo necesiten en su devenir.

Bajo este prisma los alumnos además adquirirán en el módulo de Manejo espacios cantidades los siguientes conceptos.

- Identificar y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de la proporcionalidad y del lenguaje simbólico inicial.
- Identificar aspectos cuantitativos y relaciones geométricas presentes en la vida cotidiana y en el mundo de las ciencias
- Utilizar diferentes tipos de números en diversas formas de expresión (entera, decimal, fraccionaria, porcentual) para cuantificar situaciones y resolver problemas cotidianos.
- Resolver ejercicios seleccionando secuencias adecuadas de operaciones y métodos de cálculo, incluyendo una sistematización del método ensayo-error; analizar la pertinencia de los datos y soluciones.
- Percibir la matemática como una disciplina en evolución y desarrollo permanente.
- Representar información cuantitativa a través de gráficos y esquemas.

Se pretende en este programa de primer semestre de la enseñanza media – superior retomar contenidos ya superados oficialmente, en enseñanza media, con la intención de reafirmar las capacidades y hacer más amable el cambio de nivel. Por ello, se ha diseñado una guía que sin ser exhaustiva dé un panorama amplio al alumno de la belleza y utilidad de las matemáticas, eliminando, en lo posible, la desventaja en que se encuentra esta disciplina por la etiqueta de difícil que le han pegado años de malas prácticas docentes y de aprendizajes deficientes.

Las actividades y ejercicios propuestos sólo intentan ejemplificar algunas maneras de afrontar conceptos condenados, para darles su justa medida, en las necesidades diarias, sin pretender que sean todos o los únicos que se apliquen en este proceso de aprendizaje y que cada PSP tome lo que necesite, o incorpore lo que crea necesario según sus condiciones biopsicosociales, sin coartar su iniciativa para una aplicación exitosa de los principios enunciados en este modelo Académico de Calidad para la Competitividad.

5. Orientaciones didácticas y estrategias de aprendizaje por unidad

Unidad I	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Orientaciones Didácticas	

Para abordar los contenidos de este módulo, bajo el enfoque del primer semestre y las competencias genéricas que se pretenden desarrollar, se sugiere al Prestador de Servicios Profesionales las siguientes líneas generales:

- Realizar el encuadre tanto del módulo, así como cada una de las unidades que lo integran, generando expectativas acerca de lo que se aprenderá y la utilidad de ello en su desarrollo y vida daría.
- Planear y generar clases lúdicas en donde se mantenga el interés del alumno y con ello una asistencia constante y puntual a las mismas.
- Establecer acuerdos con los alumnos, a través de contratos de aprendizaje en donde los compromisos para el desarrollo del programa permitan el desarrollo en orden de las sesiones, sin coartar la participación y el clima de confianza que se requiere para un proceso de este tipo.
- Organizar actividades grupales para impulsar el trabajo individual y en colectivo, así como impulsar la realización y entrega de tareas en forma y tiempos en los que fueron acordados.
- Permitir el trabajo entre iguales, es decir, que los propios alumnos compartan sus aprendizajes y los que avancen más rápidamente se conviertan en tutores de los otros.
- Promover actividades en donde se haga uso de las nuevas tecnologías, a través del uso de simuladores, el aula tipo Conalep y laboratorios multipropósito.
- Vincular las competencias previas con los nuevos aprendizajes tratando de generar la significatividad y la permanencia del aprendizaje
- Llevar métodos sistemáticos que permitan al PSP tener un registro de avances y dificultades que se presenten en el desarrollo de cada clase.
- Explicar dudas y contestar preguntas surgidas a partir del desarrollo de las sesiones de clase y los apuntes y tareas realizados.
- Presentar los contenidos como preguntas o problemáticas que se encuentren relacionadas con actividades diarias del propio alumno, de sus familias o comunidades, realizar los procesos y buscar que ellos transfieran la competencia adquirida a contextos diferentes.

- Durante sus semestres de Educación Básica los alumnos han abordado contenidos acerca de los números reales: racionales e irracionales, enteros, fraccionarios y decimales, positivos y negativos. Esta unidad retoma esos conceptos y plantea fundamentalmente una profundización; se propone un trabajo que tiene como columna vertebral la resolución de ejercicios en ámbitos cotidianos.
- Se permite así, que los alumnos continúen el desarrollo de sus capacidades para interpretar adecuadamente los resultados de los cálculos, para analizar los procedimientos y las respuestas a la luz de las características de los ejercicios; para aproximar y evaluar con claros criterios las respuestas, para describir fenómenos cuantitativos en forma cada vez más adecuada y precisa.
- Además, la resolución de ejercicios en esta unidad, se orienta hacia situaciones habituales que familiarizan en el alumno, el conocimiento de características y propiedades de los números racionales e irracionales de los imaginarios y complejos; de la presencia de regularidades modelos o patrones en el mundo de los números; de cómo las potencias facilitan la descripción de algunas situaciones numéricas relativas a incremento o decremento.
- El tema sobre algunos antecedentes relativos a la historia de los números es un complemento necesario para que los alumnos perciban que estos números se inventaron por imperativo de necesidades presentes en actividades diarias.
- Nuestros alumnos anteriormente se han iniciado en el uso de las letras para generalizar situaciones; por ejemplo, las letras representan medidas de longitud, en las fórmulas para el cálculo de volúmenes, áreas y perímetros de figuras geométricas, profundizar este uso retomando elementos de la educación básica.
- Generar situaciones donde se establezca que los sistemas numéricos (Maya, Romano, Indo-arábigo modernizado) son congruentes entre si.
- Establecer la necesidad del sentido de los sistemas numéricos y de su clasificación.
- Realizar ejercicios y ejemplos donde se establezcan equivalencias en diferentes tipos de monedas (Rublo, Yen, Peso, Dólar, Libra, Rupia, Dinar), en el tiempo (aC y dC) en temperaturas (bajo cero y sobre cero) altura (bajo el nivel del mar y sobre el nivel del mar).
- El desarrollo se centra preferentemente en la capacidad de generalización de situaciones que derivan del trabajo con los números, apoyados en la potencialidad del lenguaje simbólico para describir esas generalizaciones.
- Como cualquier lenguaje, el lenguaje simbólico tiene semántica y sintaxis; el significado está referido al ámbito de la aritmética, de regularidades de figuras y patrones, y también de situaciones próximas a la experiencia diaria. Es importante entonces, para que este lenguaje tenga sentido, mantener como referente permanente estos contextos.
- Es importante tener presente que las letras, en este contexto, representan números o categorías de números. Que un alumno pueda interpretar que 3a significa 3 autos, es un acomodo que posteriormente será necesario superar para que logre llegar a una generalización que le permita interpretar correctamente una expresión como 3ab.
- En cuanto a la sintaxis, se enfatizan las diferencias con la aritmética, porque los alumnos tienden a generalizar sus coincidencias. La sintaxis de la operatoria aritmética no siempre coincide con la del álgebra. Por ejemplo, un alumno de primer semestre tiene claro que 37 es un número de dos cifras en que 3 es la cifra de las decena y 7 la de las unidades; ab en álgebra representa el producto de “a por b” y 10a + b puede corresponder a un número de dos cifras en el que a es la cifra de las decenas y b la de las unidades.

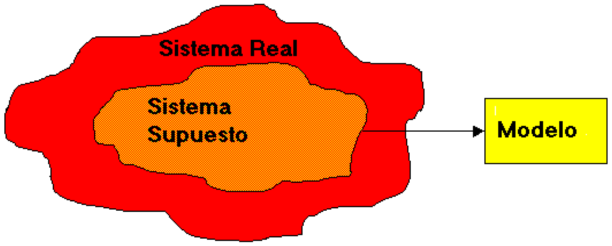
- En relación con la adición o sustracción también se suponen analogías que llevan a errores de sintaxis; en la adición aritmética, el resultado es un número; el resultado de una adición simbólica puede incluir signos + ó signos –; muchos alumnos se confunden y buscan maneras de expresar resultados de la formas 5a + b en un monomio como 5ab.
- La interpretación de la expresión “sea a un número” suele ser reducida por muchos alumnos a asumir a como un número entero positivo y -a como un entero negativo. Para corregir y ampliar esa interpretación, será necesario proponer variados ejemplos para llegar a generalizaciones que incorporen positivos y negativos, y también fracciones y decimales.
- Aún cuando seamos reiterativos es necesario mencionar que en esta unidad como en todo el módulo no nos limitamos a estas orientaciones didácticas ni a las estrategias enunciadas el PSP tiene la posibilidad de apelar a su experiencia aplicada al contexto y al entorno biopsicosocial para lleva a buen termino la apropiación de las competencias, por parte de los alumnos, del marco curricular común de la Educación Media Superior.

Estrategias de Aprendizaje	Recursos Académicos
• Realizar ejercicios y ejemplos donde se tengan que usar números muy grandes y números muy pequeños. • Efectuar competencias de cálculo mental para habituarse a valorar cuantitativamente las magnitudes. • Establecer modelos donde se apliquen los algoritmos ejemplificados en clase de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación a través de ejercicios propuestos. • Generar ejemplos, preguntas, ejercicios o conclusiones a partir de los ejercicios desarrollados y que les permitan participar en las diferentes dinámicas de trabajo. • Señalar las propiedades de las constantes, variables y exponentes. • Construir su interpretación grafica. • Ejemplificar soluciones donde se identifiquen los campos de los números reales elaborando un diagrama o mapa conceptual de los mismos. • Participar en las dinámicas de trabajo grupal o individual desarrollando, coevaluando y retroalimentando los diversos ejercicios realizados. • Identificar y definir las propiedades de la igualdad para su aplicación en ejercicios de la vida cotidiana. • Ejercitar las leyes de los exponentes y los radicales, aplicándolas constantemente en situaciones concretas. • Participar en la evaluación formativa de los productos y desempeños generados en las	Bibliografía: Tahan, Malba. **El hombre que calculaba.** Mexico Editorial Noriega 1992 Millar, C.; V, Hornsby Jr, E. **Matemática: Razonamiento y Aplicaciones.**. México Addison Wesley-Longman;1999 Enzensberger, Hans Magnus. **El diablo de los números**. 23ª edición, España, Editorial Siruela, 2007. Tahan, Malba. **Matemática divertida y curiosa**. Buenos Aires, Argentina, editorial Pluma y Papel, 2006. Priestley, M. **Técnicas y Estrategias del Pensamiento Critico.** México Editorial Trillas 1996 Consultar en la siguiente dirección electrónica:

actividades. • Modelar y ejemplificar ejercicios con situaciones del entorno inmediato, siguiendo los modelos vistos en clase o expuestos en los libros, trabajando por equipos y realimentando al grupo. • Participar en la evaluación formativa, valorando el trabajo de otro equipo o el propio (coevaluación/autoevaluación). • Responder a las preguntas realizadas por el PSP, para compartirlas con el grupo y llegar a una conclusión. • Analizar los ejemplos mostrados por el PSP y elaborar de manera individual un escrito sobre que son los sistemas numéricos y su necesidad. Posteriormente comentar el trabajo realizado, así como la experiencia de aprendizaje • Analizar cada una de las situaciones presentadas por el PSP y resolver los ejercicios relativos al tipo de lenguaje, justificando cada una de las respuestas. Compara el resultado con los comentarios al respecto del PSP.	http:/www.dgb.sep.gob.mx El documento **“Títulos sugeridos para los programas de estudio de la Reforma Curricular”**

Unidad II	Modelado matemático de problemas.
Orientaciones Didácticas	

- Para esta segunda unidad es sumamente importante fomentar y mantener el interés del alumno, como el mejor camino para la asistencia constante y participativa, en un ambiente ordenado, pero creativo y cercano a su persona.
- Es importante mencionar ante los alumnos que un modelo matemático no es completamente exacto con problemas de la vida real, de hecho, se trata de una idealización. Hay una gran cantidad de funciones que representan relaciones observadas en el mundo real; las cuales se analizarán en los párrafos siguientes, tanto algebraicamente como gráficamente.
- Un modelo es una representación ideal de un sistema y la forma en que este opera. El objetivo es analizar el comportamiento del sistema o bien predecir su comportamiento futuro. Obviamente los modelos no son tan complejos como el sistema mismo, de tal manera que se hacen las suposiciones y restricciones necesarias para representar las porciones más relevantes del mismo. Claramente no habría ventaja alguna de utilizar modelos si estos no simplificaran la situación real. En muchos casos podemos utilizar modelos matemáticos que, mediante letras, números y operaciones, representan variables, magnitudes y sus relaciones.
- Los modelos matemáticos se pueden definir desde el punto de vista de las matemáticas como una descripción de un hecho o fenómeno del mundo real, por medio de símbolos, desde el tamaño de la población, hasta fenómenos físicos como el devenir del tiempo, la velocidad, aceleración o densidad. El objetivo del modelo matemático es entender ampliamente el fenómeno y tal vez predecir su comportamiento en el futuro. El proceso para elaborar un modelo matemático es el siguiente:
  - Encontrar un problema del mundo real
  - Formular un modelo matemático acerca del problema, identificando variables (dependientes e independientes) y estableciendo hipótesis lo suficientemente simples para tratarse de manera matemática.
  - Aplicar los conocimientos matemáticos que se posee para llegar a conclusiones matemáticas.
  - Comparar los datos obtenidos como predicciones con datos reales. Si los datos son diferentes, se reinicia el proceso.
- En resumen un modelo matemático es producto de una abstracción de un sistema real: eliminando las complejidades y haciendo suposiciones pertinentes, al aplicar una técnica matemática y se obtiene una representación simbólica del mismo.



- Un modelo matemático consta al menos de tres conjuntos básicos de elementos:
  - Variables de decisión y parámetros
- Las variables de decisión son incógnitas que deben ser determinadas a partir de la solución del modelo. Los parámetros representan los valores conocidos del sistema o bien que se pueden controlar.
  - Restricciones
- Las restricciones son relaciones entre las variables de decisión y magnitudes que dan sentido a la solución del problema y las acotan a valores factibles. Por ejemplo si una de las variables de decisión representa el número de empleados de un taller, es evidente que el valor de esa variable no puede ser negativo.
  - Función Objetivo
- La función objetivo es una relación matemática entre las variables de decisión, parámetros y una magnitud que representa el objetivo o producto del sistema.
- Sugerir los materiales, documentos, equipo, nuevas tecnologías de información, etc. que serán utilizados para desarrollar las actividades planteadas

Estrategias de Aprendizaje	Recursos Académicos
• Establecer modelos donde se apliquen los algoritmos ejemplificados en clase a través de ejercicios propuestos. • A partir de la anécdota de Gauss modelar las series y sucesiones lineales desde su propia perspectiva. • Generar ejemplos, preguntas, ejercicios o conclusiones a partir de los ejercicios de operaciones con polinomios desarrollados que le permitan participar en las diferentes dinámicas de trabajo.	Bibliografía: De Oteyza, De Oteyza Elena. **Matemáticas Algebra,** México, Pearson Prentice Hall, 2007. Lehmann, Charles H.; **Álgebra**. Ed. Limusa, México; 2003.

• Resolver por equipos ejercicios en los que se requieren productos notables o factorización, también pueden realizar varios procedimientos como los geométricos o los algebraicos. • Realizar un glosario con los conceptos aprendidos durante la Unidad: igualdad, polinomio, exponente, producto de binomios, binomio al cubo, factorización y fracción. • Generar ejemplos, preguntas, ejercicios o conclusiones a partir de los ejercicios desarrollados sobre las leyes de los exponentes y radicales que le permitan participar en las diferentes dinámicas de trabajo grupal o individual. • Participar en las dinámicas de trabajo grupal o individual desarrollando, coevaluando y retroalimentando los diversos ejercicios. • Identificar y definir las propiedades de la igualdad para su aplicación en ejercicios de la vida cotidiana. • Participar en la evaluación formativa de los productos y desempeños generados en las actividades, con el apoyo de listas de cotejo y guías de observación, según sea el caso. • Modelar y ejemplificar ejercicios con situaciones del entorno inmediato, siguiendo los modelos vistos en clase o expuestos en los libros, trabajando por equipos y realimentando al grupo. • Participar en la evaluación formativa, valorando el trabajo de otro equipo o el propio (coevaluación/autoevaluación) con apoyo de instrumentos de evaluación. • Responder a las preguntas realizadas por el PSP, para compartirlas con el grupo y llegar a una conclusión. • Analizar los ejemplos mostrados por el PSP y elaborar de manera individual un escrito sobre que son los sistemas numéricos y su finalidad. Posteriormente comentar el trabajo realizado, así como la experiencia de aprendizaje • Analizar cada una de las situaciones presentadas por el PSP y resolver los ejercicios relativos al tipo de lenguaje, justificando cada una de las respuestas. Compara el resultado con los comentarios al respecto del PSP	Millar, C.; V, Hornsby Jr, E. **Matemática: Razonamiento y Aplicaciones.**. México Addison Wesley-Longman;1999 Priestley, M. **Técnicas y Estrategias del Pensamiento Critico.** México Editorial Trillas 1996 Consultar en la siguiente dirección electrónica: http:/www.dgb.sep.gob.mx El documento **“Títulos sugeridos para los programas de estudio de la Reforma Curricular”**

Unidad III	Manejo de operaciones con funciones algebraicas.
Orientaciones Didácticas	

- Se sugiere que para esta unidad se enfatice en las definiciones de los términos usados, que éstos queden muy claros y explicar, si es necesario que aún cuando existan otras acepciones en matemáticas, una función algebraica es una función que satisface una ecuación polinómica cuyos coeficientes son a su vez polinomios.
- Las funciones polinomiales tienen una gran aplicación en la elaboración de modelos que describen fenómenos reales. Algunos de ellos son: la concentración de una sustancia en un compuesto, la distancia recorrida por un móvil a velocidad constante, la compra de cierta cantidad de objetos a un precio unitario, el salario de un trabajador más su comisión, la variación de la altura de un proyectil, entre otros.
- Las funciones algebraicas son aquellas cuya regla de correspondencia es una expresión algebraica. Una función algebraica explícita es aquella cuya variable y se obtiene combinando un número finito de veces la variable x y constantes reales por medio de operaciones algebraicas de suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces.
- La teoría de conjuntos son prácticamente el preámbulo moderno para asimilar los conceptos de relación y función, el estudio sistemático de los cambios, y relaciones entre cantidades se inicia en la Educación Básica y ahora interesa profundizarlas, incorporando las relaciones entre la representación gráfica, las tablas de valores, las constantes de proporcionalidad, su representación simbólica y las funciones algebraicas.
- La proporcionalidad directa está presente en numerosas y variadas situaciones cotidianas; ha sido tema de estudio desde el tiempo de los griegos y, en la historia de la educación, en nuestro país. Ha pasado desde la regla de tres, al trabajo con igualdad de razones; desde la notación con dos puntos (:)cuya lectura “es a” a la notación fraccionaria. Un punto interesante para la reflexión pedagógica se refiere a la relación entre razones y fracciones.
- Los porcentajes están presentes en una gran diversidad de situaciones: en el diario quehacer de una persona, sus compras, créditos, rebajas o aumentos, impuestos, leyes sociales, medicina; éxitos o fracasos se apoyan en valores porcentuales; informaciones relativas a situaciones sociales, políticas, económicas se expresan, habitualmente, en variaciones porcentuales.
- Los alumnos de Primer Semestre tienen conocimientos sobre este tema, tanto desde el ámbito informal como desde su trabajo en los últimos semestres de Educación Básica. Entre otros el propósito de su estudio en esta unidad es profundizar sobre el tema y aprender a expresar y calcular el tanto por ciento como operador multiplicativo, que es la forma en que se opera generalmente, en el ámbito del comercio y de las finanzas.
- Además, en la medida de lo posible, será valioso para el aprendizaje que los alumnos se familiaricen con el uso de la hoja de cálculo en cualquiera de sus versiones; la existencia de este tipo de software, y su uso cada vez más extendido marcan la necesidad de enfatizar el aprendizaje de conceptos por sobre un exceso de cálculos escritos.
- Si definimos que una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros y en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas nos acercamos a una definición aceptada generalmente, aún cuando existan otras.

- Los valores conocidos pueden ser números, coeficientes o constantes; y también variables cuya magnitud se haya establecido como resultado de otras operaciones. Las incógnitas, representadas generalmente por letras, son las magnitudes que desconocemos y constituyen los valores que se pretende hallar.
- La información de las relaciones entre magnitudes y cantidades presentada de manera grafica es más fácil de asimilar que expresada en una ecuación por lo que representar gráficamente las relaciones y funciones de expresiones simbólicas cobra una importancia primordial para que el estudiante asimile este tipo de concepto en un contexto biopsicosocial.

Estrategias de Aprendizaje	Recursos Académicos
• Leer e interpretar gráficos de uso habitual en los medios de comunicación o que reflejan situaciones próximas a su experiencia. • Identificar las variables involucradas en un gráfico e interpretan las modificaciones en sus valores. • Resolver ejercicios de proporcionalidad directa; los representan utilizando diversos registros (tabla de valores, gráfico y expresión simbólica). • Resolver ecuaciones con proporciones. • Analizar y comparar gráficos de variación proporcional directa. • Resolver la constante de proporcionalidad directa con un cociente constante. • Resolver ejercicios de proporcionalidad inversa; los representan utilizando diversos registros (tabla de valores, gráfico y expresión simbólica). • Relacionar la constante de proporcionalidad inversa con un producto constante. • Resolver ejercicios que involucren cálculo de porcentajes; estos ejercicios incluyen porcentajes menores que 1 y mayores que 100. • Describir y comparar diversos procedimientos para representar y resolver ejercicios de porcentaje; relacionan decimales, fracciones y porcentajes. • Estimar resultados en la resolución de cálculos y de ejercicios de porcentajes. • Reconocer el porcentaje como un caso de proporcionalidad directa. • Resolver ejercicios en los que el referente asociado a 100 no está explícito. • Expresar el porcentaje como operador multiplicativo.	Bibliografia: Allen R. Angel, **Introducción al Álgebra**; Ed. Pearsón Education, México; 2008. Dugopolsky Mark, **Elementary and Intermediate Álgebra.** McGraw Hill Mexico City 2006 Consultar en la siguiente dirección electrónica: http:/www.dgb.sep.gob.mx • El documento **"Títulos sugeridos para los programas de estudio de la Reforma Curricular"**

• Utilizar calculadora y hoja de cálculo para registrar y calcular porcentajes. • Transformar expresiones simbólicas por cálculo de productos, factores, reducción de términos semejantes y eliminación de paréntesis. • Calcular productos notables; los factorizan; los interpretan numérica y geométricamente. • Resolver ejercicios que involucren productos y/o factores. • Analizar las fórmulas e interpretan las variaciones que se producen en perímetros, áreas o volúmenes, por cambios en las medidas lineales de las figuras. • Representar categorías de números por medio de expresiones simbólicas: múltiplos de...; factores de...; mayores que...; números pares, etc. • Plantear y resolver ejercicios que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita. • Generalizar la notación de potencias y utilizar procedimientos convencionales para el cálculo de multiplicación y división de potencias. • Generar ejemplos, preguntas, ejercicios o conclusiones a partir de los ejercicios desarrollados que le permitan participar en las diferentes dinámicas de trabajo grupal o individual.	

6. Prácticas/Ejercicios /Problemas/Actividades

Nombre del alumno:	
Grupo:	
Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.1	Representa situaciones o fenómenos de la vida cotidiana, en términos cuantitativos, empleando el conjunto de los números reales, imaginarios y complejos y la aplicación de sus operaciones básicas.
Ejercicio núm. 1:	Resolver ejercicios para analizar diversas situaciones que permitan visualizar ritmos de crecimiento que se pueden describir por la multiplicación o la adición iterada de un mismo número. Utilizar tablas de valores y/o diagramas de árbol para formarse una idea de los crecimientos o decrecimientos.

Situaciones que involucran potencias con base positiva y exponente entero

Ejemplo A: Eugenia llama por teléfono a tres amigas y las convence para que, al día siguiente, regalen un kilo de alimentos a los damnificados de Tabasco y llamen a otras tres amigas para que ellas, a su vez, al día siguiente regalen un kilo de alimentos para el mismo fin y llamen a otras tres amigas y así continúen con esta cadena de solidaridad.

Si todas las personas involucradas en la cadena cumplen el compromiso y tienen que enviar el kilo de alimentos al día siguiente de recibido el llamado, ¿cuántos kilogramos de alimento reciben los damnificados de Tabasco al cabo de 10 días?

Consideraciones adicionales:

- Para afrontar y visualizar formas de resolución de este ejercicio, los alumnos pueden utilizar el diagrama tipo árbol y/o una tabla de valores.
- Se puede recurrir a la notación con potencias para expresar la cantidad de regalos al cabo de 5, 8, 10. 20 días. La resolución de este ejercicio abre un espacio para la estimación de resultados, comentar sobre la diversidad de maneras de hacerlo y distinguir las más eficientes, con mayor aproximación, con menor riesgo de error. En el proceso de su resolución se puede incorporar el uso de la calculadora y la multiplicación de potencias.

Ejemplo B: Una empresa ofrece un incentivo económico a sus empleados además de los sueldos.

Propone dos formas para que ellos elijan.

Una propuesta se inicia con $3.000 en la primera semana los que se incrementan semanalmente en $1.000. La otra propuesta se inicia con $10 en la primera semana, y se duplica semanalmente lo recibido en la semana anterior.

¿Cuál de las dos propuestas es más conveniente si el convenio tiene una duración de 10.

12, 15, 20. 30 semanas?

Consideraciones adicionales:

- Es conveniente apoyar la elaboración de tablas que facilitan la comparación y permiten visualizar el proceso de crecimiento de los números.
- La resolución de este ejercicio abre espacio para la búsqueda de formas de estimación de resultados. En el proceso de su resolución, es necesario enfatizar el significado de expresiones como 3000 + 12 x 1000 y comparar con 10×2^{12}, por ejemplo.
- Este ejercicio se puede retomar y generalizar en el trabajo de la unidad *Lenguaje simbólico* para apoyar la distinción entre las notaciones aditivas y las multiplicativas, como son **2a** y $\mathbf{a^2}$.

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.1	Representa situaciones o fenómenos de la vida cotidiana, en términos cuantitativos, empleando el conjunto de los números reales, imaginarios y complejos y la aplicación de sus operaciones básicas.
Ejercicio núm. 2:	Resolver ejercicios para relacionar las potencias de base mayor que 1 con procesos de crecimiento; y aquéllas con base entre 0 y 1 con decrecimientos. Conocer el significado de la notación de potencias con exponente entero negativo y relacionar con el valor inverso de un número

Ejemplo A Un rectángulo de cartulina de 1 mm de espesor se dobla por la mitad, sucesivamente en 20 dobleces, ¿qué hipotética altura tiene esa cartulina doblada, después del vigésimo doblez? Si la cartulina tiene un grosor de 0.5 mm, ¿cuántos dobleces son necesarios para que tenga la misma altura que tiene la otra cartulina después del vigésimo doblez?

***Consideraciones adicionales**:*

- Este ejercicio abre las puertas a la imaginación. Es interesante que anticipen los posibles resultados tanto en relación con la primera como con la segunda pregunta.
- Es necesario que los alumnos lleguen a expresar las relaciones numéricas en notación de potencias. Se puede generar un momento adecuado para comparar las expresiones 1×2^{20} con 0.5×2^{21}
- Como la notación de potencias de 10 con exponente negativo es conocida por los alumnos, se puede recurrir a esta notación para extenderla a otras bases. $0.1 = 1/10 = 1^{-1}$, $0.01 = 1/100 = 100^{-1} = 10^{-2}$
- Al extender esta forma de notación a otras bases positivas, será necesario relacionar el significado del signo menos en el exponente, con el valor inverso del número. Así, $3^{-1} = 1/3$ y $3^{-2} = (1/3)^2 = 1/9$. Además, la fracción $2/5 = (5/2)^{-1}$, etc.
- Es importante que los alumnos lleguen a establecer que todo número positivo se puede escribir como potencia con exponente positivo y también con exponente negativo.
- Un error habitual en esta extensión de notación, es extender la forma de la igualdad $10^{-1} = 0.1$ a otras bases; por ejemplo, en lugar de $4^{-1} = 1/4$, los alumnos anotan 0.4.
- Será necesario hacer ejercicios de uso de exponentes positivos y negativos, en situaciones en que ello simplifica la notación y ayuda a la comprensión y descripción de situaciones. La notación científica es uno de los usos clásicos de las potencias de base 10 con exponente negativo.

Ejemplo B Para cubrir una terraza se utilizó una carpa cuadrada de 8 m por 8 m. Para transportarla se usa una camioneta que tiene un espacio para transporte que mide 2 m de largo por 1 m de ancho. Si esta carpa se va doblando por la mitad, ¿cuántos dobleces son necesarios para que quepa bien en la camioneta?

***Consideraciones adicionales*:**

- □ Es altamente probable que este ejercicio se resuelva con apoyo de un dibujo o tablas de valores. Será interesante complementar esos procesos de solución con la notación numérica que los representa, como: 2^6 x 2^{-1} = 2^5 (que corresponde al decrecimiento del área que genera el primer doblez); 2^6 x 2^{-5} = 2, (que corresponde a la situación después del quinto doblez).
- □ La resolución de este ejercicio abre espacio para reflexiones en torno a las potencias con base entre 0 y 1 y exponente positivo o, lo que es equivalente, con base mayor que 1 y exponente negativo.

Ejemplo C Si supones que demoras 1/5 segundos en escribir un 0. y 0.1 segundo en escribir un 1, ¿en la escritura de cuál de los siguientes números ocuparás más tiempo: 0.1^{100}; 10^{100}; 0.1^{-100} ?

***Consideraciones adicionales*:**

- □ Este ejemplo permite generar una imagen de un decimal con 100 cifras decimales. Sin embargo, se ubicó en este núcleo temático porque permite visualizar cómo la notación de potencia es facilitadora para expresar los números que representan grandes y pequeñas cantidades.

Ejemplo D Determinar cuál es mayor: 8^3 ó 3^8;
Determinar cuál es mayor: $(0.8)^3$ ó $(0.3)^8$

***Consideraciones adicionales*:**

- □ Este ejemplo se orienta hacia la búsqueda de procedimientos para comparar potencias; y hacia la necesidad de observar tanto el signo de los exponentes y su orden de magnitud como el valor de las bases y su relación con el valor 1.
- □ Pueden analizar desde ‘la conmutatividad’: 8 • 3 = 3 • 8, relación que no se verifica en las potencias; hay una excepción: $2^4 = 4^2$. Otro tipo de ejercicio que se puede proponer es la transformación de una potencia en otra equivalente: $3^4 = 9^2$.

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.1	Representa situaciones o fenómenos de la vida cotidiana, en términos cuantitativos, empleando el conjunto de los números reales, imaginarios y complejos y la aplicación de sus operaciones básicas.
Ejercicio núm. 3:	Ejercitar la multiplicación y división de potencias con base positiva y exponente entero.

Ejemplo A Completar para que las igualdades sean verdaderas.

$3^4 : 3^8 = 3^4 \text{ x } \_\_\_$

$8^2 \text{ x } 4 = \_\_\_\_$

$(0.5)^2 : 2^{-2} =$

$3 \text{ x } 10^8 \text{ x } \_\_\_\_ = 10^5$

Consideraciones adicionales:

- En la ejercitación es importante dosificar los ejercicios de modo que el trabajo habitual se transforme en desafíos para el pensamiento y reflexión de los alumnos y no en repeticiones reiteradas de algoritmos sin sentido. Mejor aún, si la ejercitación se puede distribuir en la medida en que se van aprendiendo formas de cálculo y de transformación numérica asociadas a los ejercicios.

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.

Resultado de aprendizaje: 1.1	Representa situaciones o fenómenos de la vida cotidiana, en términos cuantitativos, empleando el conjunto de los números reales, imaginarios y complejos y la aplicación de sus operaciones básicas.

Ejercicio núm. 4:	Resolver ejercicios de distintos ámbitos: naturaleza, deportes, trabajos u oficios, comercio, ciencias, producción, etc., que requieran no sólo la realización de cálculos con decimales y fracciones, sino que, además, generen la necesidad de hacer estimaciones y aproximar resultados, de relacionar la unidad de medida del resultado con los datos y las cifras significativas y, eventualmente, interpretar los resultados obtenidos en una calculadora.

Situaciones que involucran números racionales, irracionales, decimales y fracciones

Ejemplo A Una información de prensa de fecha 2 de junio de 2008, señala que la producción diaria de basura en el Estado de México es 7.000 ton. Estimar un promedio de basura por casa, suponiendo cinco personas por casa y un total de 15 millones de habitantes.

Consideraciones adicionales:

- □ La resolución de este ejercicio genera espacio para trabajar el concepto de cifras significativas y de aproximación.
- □ Si se trabaja en toneladas, y se estima la población del E. de M. en 15 millones, el resultado es un decimal periódico y su unidad de medida es toneladas de basura por casa.
- □ En ese caso, si se usara una calculadora básica, la pantalla indicaría 0.002333; si se usara una calculadora científica se obtendría en pantalla el resultado 2.333333333-03. Es necesario interpretar adecuadamente estos números para resolver el ejercicio. ¿A qué corresponde, de acuerdo con los datos del ejercicio?
- □ Si se trabaja en kg en lugar de toneladas, la situación es diferente en cuanto a la forma en que el resultado aparece en la pantalla.
- □ Si la población del E. de M. se estimara en 14 millones, calcular el promedio de basura por persona se transformaría en un ejercicio de cálculo escrito simplificado o en un cálculo mental.
- □ Puede ser un momento adecuado para establecer las diferencias entre los decimales de extensión finita, los infinitos periódicos y aquéllos que no son periódicos.

Ejemplo B Se necesita fabricar conductos cilíndricos de latón para estufas de combustión lenta; las conductos deben medir 0.75 m de alto y tener diámetros de 18, 20 y 24 cm.

¿Cuántas planchas se necesitan para fabricar 10. 15, 22 conductos de cada medida?

El jefe de producción informó que las planchas de latón tienen 1,60 m por 2 m.

Consideraciones adicionales:

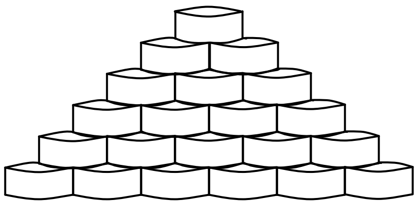
- □ Es probable los alumnos no recuerden cómo determinar la superficie del cilindro; conocido o recordado ese procedimiento, pueden proceder a calcular cuántas planchas necesitan.
- □ Cualquiera que sea el procedimiento de resolución que utilicen, los alumnos tendrán que aproximar cifras decimales y hacer ajustes de unidades de medida de superficie, además de tomar decisiones sobre la aproximación decimal de en el cálculo del área del cilindro.

- Interesa destacar dos formas, de la gran diversidad que se puede presentar, para resolver este ejercicio:
- Una, en que los alumnos calculan cuánto latón es necesario para hacer cada uno de los tipos de conducto; multiplican cada uno de esos resultados por 22 para saber cuánto se necesita para los 22 conductos de cada tipo; hacen la suma final. Les resulta, aproximadamente 32,2 m2. Para calcular cuántas planchas son necesarias, dividen ese total por 3,2 m2 que corresponde al área de una plancha. En este caso obtendrán como resultado 10.04. ¿Tiene sentido una aproximación a 10?
- ¿Cómo se incorpora en la resolución del ejercicio la parte física de la construcción, por ejemplo, los centímetros necesarios para las soldaduras?
- Dos, Otra forma de resolver este ejercicio es hacer un esquema de diseño de los rectángulos por tipo de conducto, con las correspondientes medidas; distribuirlos en el dibujo de una plancha, considerando el mejor aprovechamiento del material y la posibilidad de hacer las soldaduras; esta es una distribución que se apoya en cálculos. A partir de este análisis, calculan la cantidad de planchas necesarias. En ambos caso la respuesta es que se necesita disponer de 11 planchas.
- En la resolución de ejercicios es necesario tener presente el significado de los cálculos y de los resultados; su relación con los datos planteados y la situación que los contextualiza.
- Conviene un comentario adicional respecto a las diferencias entre racionales e irracionales y sus aproximaciones decimales.

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.1	Representa situaciones o fenómenos de la vida cotidiana, en términos cuantitativos, empleando el conjunto de los números reales, imaginarios y complejos y la aplicación de sus operaciones básicas.
Ejercicio núm. 5:	Resolver ejercicios para observar, proponer y constatar la presencia de patrones o regularidades numéricas. Construir y poner en juego estrategias de solución a ejercicios.

Situaciones relativas a patrones o regularidades numéricas

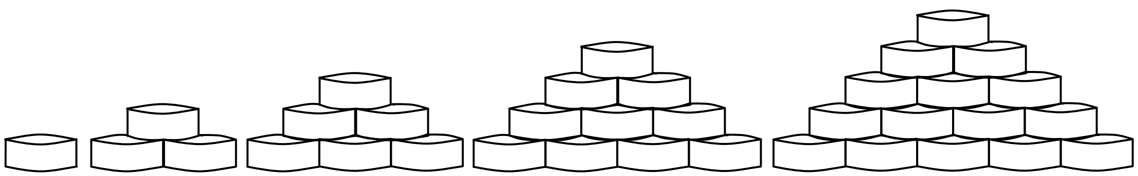
Ejemplo A José dispone las latas de conserva en el supermercado en torres como la que indica el dibujo:



¿Cuántos tarros de conserva son necesarios para hacer una pila que tiene una base de 6, 12, 16, 20 latas?

***Consideraciones adicionales*:**

- □ En el ejercicio planteado será interesante conocer qué procedimientos utilizaron los alumnos para resolverlo. El que se ilustra a continuación permite tener otra representación del ejercicio:
- □ Los números 1, 3, 6, 10. 15, se denominan números triangulares porque se pueden distribuir en la forma de un triángulo.



1 3 6 10 15

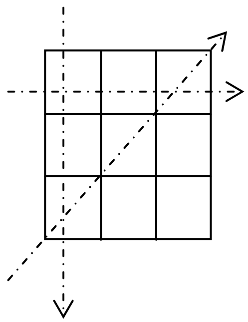
- □ En cualquiera de estos triángulos, se puede calcular el número correspondiente, haciendo el siguiente arreglo, considerando cualquiera de los números triangulares.
- □ Esta explicación gráfica es un complemento necesario para que los alumnos propongan otras formas de cálculo que den respuesta al ejercicio planteado.
- □ Esta estrategia puede ser mostrada para un número triangular de base menor y en seguida extenderse a números triangulares de base mayor.
- □ Este ejercicio puede ser retomado en la unidad de Lenguaje simbólico.

Ejemplo B Calcular la cifra de las unidades: $8^5 - 8$; $3^5 - 3$; conjeturar sobre esta cifra considerando los otros dígitos.
Hacer un cuadro que resuma la cifra de las unidades de las segundas, terceras, cuartas y quintas potencias de los dígitos.

***Consideraciones adicionales*:**

- Será interesante observar el tipo de anticipación que se atreven a plantear los alumnos en relación con la cifra de las unidades de la diferencia **a5 – a** en que **a** es un dígito.
- A partir del cuadro se pueden plantear algunas afirmaciones generales, tales como, si un número termina en 2, 3, 7 u 8 no es un cuadrado y otras relativas a la cuarta y quinta potencia. También se puede afirmar que si un número es cuadrado y termina en 6, entonces su raíz termina en 4 ó 6, etc.

Ejemplo C Escribir, en un cuadrado de 3 x 3, los siguientes números: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, de modo que la suma de las líneas, columnas y diagonales mayores sea la misma.



Consideraciones adicionales:

- Esta es una variante de los clásicos cuadrados mágicos. Es interesante observar qué estrategia utilizan para completar los cuadrados.
- Este ejercicio se puede ampliar a cuadrados de 4 x 4, de 5 x 5, etc., considerando los cuatro, cinco,... primeros dígitos, repetidos cuatro, cinco veces. En el caso de un cuadrado de 2 x 2 el ejercicio no tiene solución.
- Se puede perfilar una estrategia común para los cuadrados con número impar de cuadrados por lado.

Ejemplo D ¿Cuál es la cifra número 100 de la expresión decimal de la fracción 2/7?

Consideraciones adicionales:

- Este ejemplo ayuda a visualizar la extensión periódica de las expresiones que se asocian a algunos racionales. Los períodos decimales son regularidades numéricas que no están presentes en todos los números decimales. Desde este análisis, este ejercicio puede utilizarse para el trabajo con fracciones y decimales.

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.1	Representa situaciones o fenómenos de la vida cotidiana, en términos cuantitativos, empleando el conjunto de los números reales, imaginarios y complejos y la aplicación de sus operaciones básicas.
Ejercicio núm. 6:	Analizar y resolver ejercicios para discriminar y caracterizar los números racionales y los irracionales; su notación y/o aproximación decimal. Construir líneas que admiten como medida algunas raíces y las ubican en la recta numérica.

Situaciones relativas a números racionales e irracionales

Ejemplo A El PSP propone las siguientes reglas del juego:

• Yo pienso un número cualquiera;
• Ustedes buscan maneras para descubrir cuál es el que he pensado; tienen derecho a proponer números;
• Ante los números que ustedes digan yo les indicaré si es el que yo he pensado, o bien, si es mayor o menor.

***Consideraciones adicionales*:**

- ☐ Es conveniente llevar un registro en el pizarrón de los números que se van diciendo y establecer un código que permita distinguir si el número pensado es mayor o menor; así es posible reconstruir la sucesión de números propuestos.
- ☐ Es conveniente pensar en un decimal con dos o tres cifras decimales.
- ☐ En cuanto a la estrategia para descubrir el número, a veces hay que orientar hacia el encajonamiento sistemático. Si el número pensado fuera 34,567, por ejemplo, los gestos y rostros expresan desconcierto en el momento en que constatan que dicho número es mayor que 34 y menor que 35.
- ☐ En cierta medida, los alumnos logran visualizar la idea de infinitas cifras decimales.
- ☐ ¿Cómo se desarrolla este ejemplo si el número pensado es 1,3333... periódico o si el número pensado fuera Pi (3.141615….?
- ☐ El desarrollo de esta actividad puede apoyar un proceso de sistematización sobre los decimales, los periódicos y los no periódicos.

Ejemplo **B** Construir líneas, en papel cuadriculado, considerando las siguientes condiciones:

- Que tengan como medida un número entero: 2; 23; 12; unidades;
- Que tengan como medida números decimales: 1/2; 3/5; 0.1; unidades;
- Que tengan como medida fracciones 1/2; 1/3; 4/5;
- Que tengan como medida enteros, decimales e irracionales: el lado de un cuadrado de lado 5 unidades, la diagonal de ese cuadrado y un trazo que mide 0.2 unidades.
- ¿Cuál o cuáles pueden ser medidas comunes en cada trío de líneas?

***Consideraciones adicionales*:**

- La resolución de este ejercicio toca diversos e importantes conceptos.
- Remite al tema de divisores o factores comunes para el primer caso, que es una forma de comparación por cociente.
- Invita a reflexionar sobre la existencia de medidas comunes entre líneas cuyas medidas son números decimales y entre líneas cuya medida son fracciones que se pueden expresar como decimales periódicos.
- Finalmente, lleva a aceptar que no existe una medida común para el cuarto caso.
- La medida común también está asociada al orden; visualizar que todos los números, racionales e irracionales, tienen su ubicación específica en la recta numérica es un desafío que involucra un grado de dificultad.
- Este ejercicio se puede complementar con reflexiones acerca de la insuficiencia del sistema de la numeración decimal para anotar con exactitud los números irracionales.

Ejemplo C

Determinar la ubicación relativa, en la recta numérica, de los números 3,1416; 3,14; ∏.

Puede plantear preguntas del tipo: ¿son diferentes o son el mismo? ¿Por qué?

O bien, proponer números como $\sqrt{28}$; 6; $\sqrt{20}$: ¿cuál es mayor? ¿Por qué? Utilizar una calculadora para compararlos.

***Consideraciones adicionales*:**

- Además de reconocer las diferencias entre un número racional y un irracional, es interesante hacer nuevas reflexiones sobre el tema de las aproximaciones decimales.
- Con el apoyo de una calculadora se pueden proponer otros ejemplos como indicar entre qué números se ubica $\sqrt{0.9}$; $\sqrt{0.09}$; $\sqrt{2,5}$; etc.
- Los alumnos saben que las raíces y el número ∏ son irracionales; apoyados en el teorema de Pitágoras, pueden construir líneas que admiten como medida algunas raíces y ubicarlas en la recta numérica.

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.1	Representa situaciones o fenómenos de la vida cotidiana, en términos cuantitativos, empleando el conjunto de los números reales, imaginarios y complejos y la aplicación de sus operaciones básicas.
Ejercicio núm. 7:	Recoger información en libros de historia de la matemática, sobre el cero, los decimales y los negativos, para que se aproximen a una percepción de que la matemática es un área del conocimiento que se desarrolla a través del tiempo.

Situaciones acerca del desarrollo histórico de los números

Ejemplo A En un foro o panel discutir sobre la existencia de situaciones de la vida real que se puedan desarrollar sin números.

Ejemplo B

Revisar las actividades diarias e imaginar que los números no existen, ¿qué dificultades se generarían?

Imaginar que no existen las fracciones, ¿que tipo de actividades se limitarían o dificultarían?

Consideraciones adicionales:

- Para una mejor comprensión del sentido de la matemática es necesario que los alumnos la perciban como un área del conocimiento que evoluciona y que busca respuestas a situaciones planteadas como ejercicios desde la sociedad y también a ejercicios que derivan de otras ciencias y de la matemática misma.

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.

Resultado de aprendizaje: 1.2	Resuelve problemas cotidianos, a partir de la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico.

Ejercicio núm. 8:	Utilizar letras y expresiones simbólicas para representar números, categorías de números, patrones numéricos o geométricos y/o relaciones cuantitativas. Comparar el lenguaje habitual con el simbólico. Leer e interpretar expresiones simbólicas.

Situaciones en las que traducen a lenguaje simbólico relaciones cuantitativas que involucran números positivos y negativos

Ejemplo A

Expresar simbólicamente tipos de números como los siguientes:

- Todos los números pares
- Todos los impares
- Números consecutivos
- Pares consecutivos
- Impares consecutivos
- Los múltiplos de un número determinado
- Las edades de tres amigos, si el de más edad es 5 años mayor que uno y 3 mayor que el otro.

***Consideraciones adicionales*:**

☐ En cualquiera de estos ejemplos es importante que los alumnos se acostumbren a precisar cuál es el significado de cada letra.

☐ Además, los alumnos pueden constatar la validez de las expresiones reemplazando por valores numéricos.

☐ Si todos escribieran de la misma manera tres números consecutivos, es recomendable presentar

- Otras alternativas: x; x + 1; x + 2;
- Otra forma, x – 1; x; x + 1;
- O también, x + 8; x + 7; x + 6; etc.

Ejemplo B Construir sucesiones finitas de números enteros y buscar formas de expresarlas en un término general. Para ello pueden convenir un número inicial y una diferencia constante, expresar oralmente la sucesión que obtienen y escribir su expresión simbólica o algebraica.

- ¿De qué formas se puede expresar simbólicamente la sucesión 23, 28, 33, 38, 43, 48?
- ¿Qué sucesión representa 34 – 7x para x = 1, ... , 8? ¿Cuál es el menor y el mayor número de esta sucesión?
- ¿Qué sucesión representa 5x – 10 para x = -5, ... 5? ¿Cuál es el mayor número? ¿Cuál es el menor?
- ¿Qué sucesión representa 1/(3 – x) para x = -2, ... , 5? ¿Es posible para todos los valores?
- ¿Qué sucesión representa x • 10-x para x = -1, ... , 4 ?

• ¿Qué sucesión representa 1 – 4x con x = 1/4, 1/2, 3/4, ... 2?

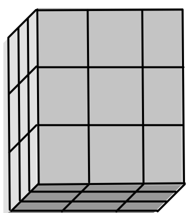
Recíprocamente, pueden proponer una expresión simbólica de una sucesión para que otros la decodifiquen y precisen sus términos.

Buscan otras formas de construir sucesiones.

***Consideraciones adicionales*:**

- Registran la diversidad de expresiones simbólicas que pueden establecer.
- Para el primer caso se puede pensar en posibilidades como las siguientes:
  5x + 3, para 4 < x < 9
  5x – 2, para 5 < x < 10
  5x + 8, para ...
- Es necesario incluir ejemplos en los que la variable asuma valores fraccionarios y decimales, positivos y negativos. Considerar fracciones en que cambia sólo el numerador o el denominador, o ambos. Además, que en el caso de las fracciones permita restringir el valor de la variable para que el denominador sea distinto de cero.
- En relación con el lenguaje simbólico, interesa que los alumnos vayan percibiendo su potencialidad para generalizar, su precisión y cómo se diferencia del lenguaje de uso diario.

Ejemplo C

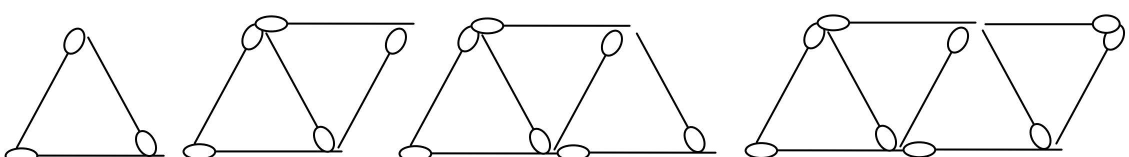


Si se pintan las seis caras de un cubo grande, formado por 27 cubos más pequeños, ¿cuántos de los cubos pequeños quedan con 3, 2, 1, 0 caras pintadas?

Si el cubo grande estuviera formado por 4 x 4 x 4 cubos pequeños, ¿cuántos tendrían 3, 2, 1, 0 caras pintadas?

Si el cubo está formado por n x n x n cubos pequeños, ¿cuántos tendrían 3, 2, 1, 0 caras pintadas?

Ejemplo D Con fósforos, armar una sucesión de figuras como las siguientes:



¿Cuántos fósforos se necesitan para la décima figura y para la undécima?

Consideraciones adicionales:

- Ambos ejemplos tienen un carácter lúdico; esto puede apoyar el desarrollo de actitudes positivas hacia el aprendizaje de la matemática.
- En ambos casos es conveniente organizar cuadros o tablas de registros de los datos para contar con un apoyo para la generalización.
- Este tipo de actividad se orienta hacia aprendizajes que suelen ofrecer dificultades a algunos alumnos; será necesario buscar formas de hacer lo más tangible posible el proceso de generalización.
- La propuesta con los fósforos y el triángulo se puede extender a otras figuras iniciales como cuadrados, pentágonos, hexágonos, etc.
- En este tipo de actividad es muy importante que los alumnos comenten las diferentes estrategias utilizadas para resolver el desafío planteado. De este modo se incentiva la reflexión sobre sus propios procedimientos de pensamiento.

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.2	Resuelve problemas cotidianos, a partir de la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico.
Ejercicio núm. 9:	Situaciones donde se ordenan y representan en una recta numérica expresiones simbólicas.

Ejemplo A

Sean a, b, c, tres números; si a < 0; b > c y b > 0

• Situé los números en la recta

• Situé - a; -c

• Situé a + b

• Situé -3 a; 5b

***Consideraciones adicionales*:**

- □ En relación con el ejemplo, será interesante observar qué deciden en relación con **c**, si lo ubican a la izquierda o a la derecha del cero. Este tipo de ejercicio contribuye a que los alumnos acepten que **a** puede ser cualquier número (positivo o negativo), y se habitúen a interpretar y a extraer conclusiones a partir de esas representaciones.

Ejemplo B

Determinar sobre la recta numérica la ubicación relativa de a2 y ab si a y b son enteros y b < a.

Consideraciones adicionales:

- □ Este ejemplo abre un espacio para analizar una diversidad de situaciones tales como ambos son positivos mayores que 1, ó 0 < **a** < 1; si ambos son negativos, etc.

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.2	Resuelve problemas cotidianos, a partir de la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico.
Ejercicio núm. 10:	Situaciones relativas a la reducción de términos semejantes, eliminación de paréntesis, expresando simbólicamente relaciones numéricas

Ejemplo A Expresar simbólicamente:

- El perímetro de un rectángulo en que un lado es 3 m más largo que el otro;
- El perímetro de diferentes figuras geométricas;
- La suma de dos números pares, de tres, de cuatro, ... ;
- La suma de dos, tres, ... números impares;
- La suma de un impar con un par;
- La suma de áreas de dos o más cuadrados de lados a ó b;
- La suma de volúmenes de cubos de aristas m ó n.

Consideraciones adicionales:

- □ Para muchos alumnos es difícil reconocer que hay una gran variedad de rectángulos cuyos lados tienen 3 m de diferencia. Es necesario que perciban la diferencia entre la clase de estos rectángulos y aquéllos cuyos lados miden 30 y 33 metros.
- □ Estos ejemplos, de una apariencia sencilla, involucran distinciones sintácticas entre las expresiones simbólicas 3m : m3; m+ 3 por plantear algunas junto a la suma y resta de términos semejantes.
- □ Para el aprendizaje de matemática, es muy importante que los alumnos perciban la diferencia entre lo particular y una generalización.

Ejemplo B

Anotar paréntesis en la expresión, 2a – 3b – 5 + ab que implique cambios de signo, sin alterar su valor.

Consideraciones adicionales:

- □ En esta unidad conviene focalizar la atención en el uso de paréntesis para expresar la adición y sustracción de polinomios, considerando variables en primer y segundo grado. Si se considera necesario, se puede verificar el uso correcto de los paréntesis por medio de la valoración de expresiones.
- □ Para darle sentido, se puede recurrir a situaciones numéricas del tipo siguiente: Diego dispone de $3.000. compra una revista en $820 y le regala $550 a su hermano. ¿Qué procedimientos escritos puede utilizar Diego para calcular cuánto dinero le queda?
- □ Se puede proponer los dos esquemas siguientes que permiten apoyar el significado del uso de los paréntesis:

a) $\underbrace{\underbrace{3000 - 820} - 550}$

b) $\underbrace{3000 - \underbrace{(820 + 550)}}$

- Es necesario que los alumnos se habitúen a pasar de una forma de expresión con paréntesis a una sin paréntesis y viceversa.

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.2	Resuelve problemas cotidianos, a partir de la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico.
Ejercicio núm. 11:	Utilizar la notación a^n en que a es un número positivo y n es un entero. Reducir términos semejantes, ejercitar la multiplicación y división de potencias.

Ejemplo A

Verificar la igualdad de algunas expresiones simbólicas que incluyen potencias, recurriendo al significado de la notación o utilizando la valoración de expresiones.

$a^m \bullet {}^{m-3} = a^m : a^{3-m}$

$x + y^{-1} = (xy + 1)/y$

$2^{m+3} \bullet 2^{2-m} = 32$

$(3ab)^2 = 9\ a^2\ b^2$

Ejemplo B

Comparar expresiones que incluyen potencias

- ¿Cuál es mayor a^b ó a^{b+1}?
- ¿Cuál es mayor a^m ó b^m?
- ¿Cuál es mayor a^n b ó $(ab)^n$?

***Consideraciones adicionales*:**

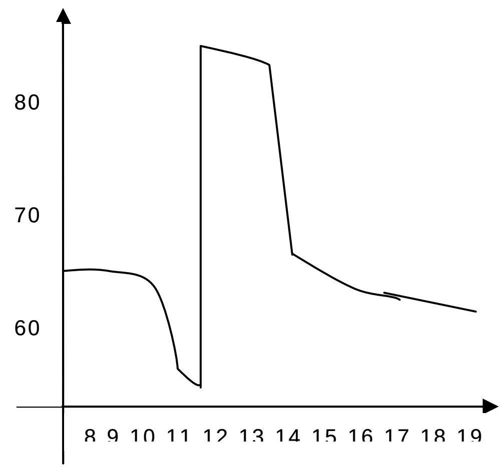
- Es importante que los alumnos lleguen a un buen manejo de las transformaciones de escritura; que se pueda lograr un equilibrio entre la ejercitación y la comprensión.
- Que los alumnos visualicen las diferencias, en el ejemplo B, si la base es mayor o menor que 1 y si los exponentes son positivos o negativos.
- En relación con el uso de paréntesis es importante mostrar la diferencia entre el significado de $2a^n$ y $(2a)^n$.

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.2	Resuelve problemas cotidianos, a partir de la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico.
Ejercicio núm. 12:	Leer, interpretar y comunicar información sintetizada en gráficos de diversos tipos: de barra, poligonales, circulares, pictogramas variados; que se refieran a diversidad de temas. Reconocer las variables consideradas, qué representan los ejes, el significado de los cambios en los valores de las variables.

Situaciones relacionadas con la lectura e interpretación de gráficos.

Ejemplo A

En un instituto de estudios se instaló una máquina que expende refrescos. Durante un día, la empresa dueña de la máquina hizo un estudio sobre la venta de refrescos entre las ocho de la mañana y las ocho de la tarde. Este estudio quedó registrado en el gráfico siguiente:



Responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuántos refrescos había a las 8 de la mañana?
- ¿En qué períodos no se ha retirado refrescos?
- Entre las 11:00 y las 11:30 horas hay recreo, ¿cuántos refrescos se retiraron en ese período?
- ¿A qué hora se volvió a llenar la máquina?
- ¿Cuándo se han consumido más bebidas por hora: en el recreo o durante el almuerzo?
- ¿A qué hora se supone terminan las clases en ese instituto?

Consideraciones adicionales:

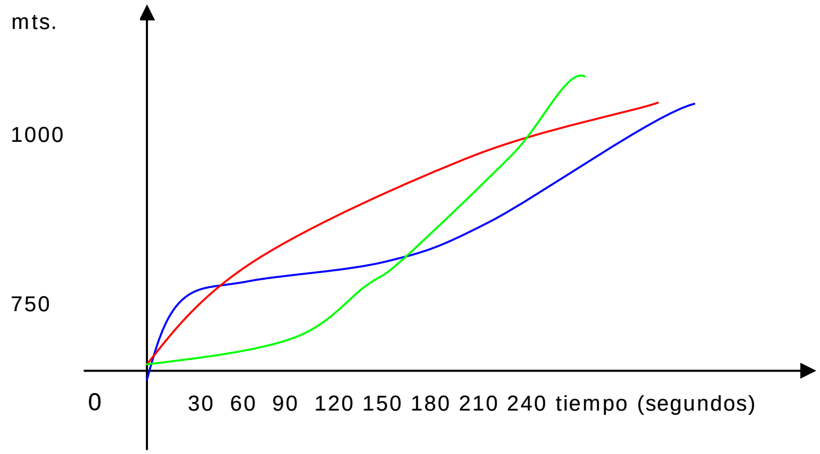
- En este gráfico, la variable tiempo, que es continua, está en el eje x; en cambio la variable en el eje y es discreta. Sin embargo el trazar una gráfica como si ambas fueran continuas facilita la lectura y señala las tendencias en los distintos períodos de tiempo.
- Será interesante conocer las distintas formas que los alumnos utilicen para responder la quinta pregunta. Es posible que para algunas sea suficiente la sola observación del gráfico mientras otros necesitarán hacer el cálculo numérico: el número de bebidas por unidad de tiempo.
- La sexta pregunta se orienta a suponer conclusiones fundadamente, a partir de la lectura del gráfico.

Ejemplo B

Tres atletas participan en una carrera de 1.000 m. Un periodista deportivo trasmite esta carrera desde el estudio radial; cuenta con el apoyo de una transmisión directa por televisión y con una conexión computacional que le permite ver en una pantalla los gráficos del desempeño de los tres atletas, diferenciados por color.

Por alguna razón se pierde la señal de TV y el periodista realiza su transmisión sólo con el apoyo de los gráficos del computador.

Si tú fueras el locutor, ¿cómo relatarías los momentos más interesantes de esta competencia, si la pantalla del computador presenta el gráfico siguiente?

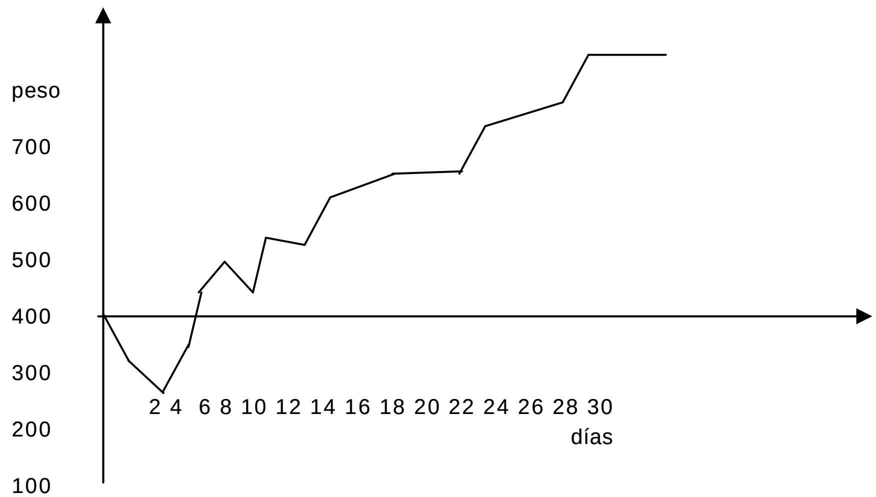


***Consideraciones adicionales*:**

- Podrían organizarse grupos de trabajo y que cada grupo escribiera la locución que considere adecuada. Eventualmente, esta locución podría cumplir algunas indicaciones específicas; por ejemplo, sobre el momento de partida, los momentos en que dos corredores van a la par y el orden de llegada.
- Será interesante pedirles que expliquen en qué se fijan para saber el orden de llegada o por qué saben que en determinado momento de la carrera coinciden dos competidores.
- Una vez realizadas estas tareas, comparar con el tipo de información que podría proporcionar una tabla o varias tablas. ¿En qué circunstancia puede ser más eficiente una tabla? Considerar criterios como exactitud, cantidad de información, tendencia, entre otros.

Ejemplo C

El gráfico siguiente indica las variaciones de peso de un bebe, durante los primeros treinta días de su vida. Peso al nacer: 3,500 kg.



Respondan las preguntas que siguen:

- ¿Cuál es el peso del bebe a los 8 días?
- ¿En qué días el peso es el más bajo?
- ¿En qué días el peso ha permanecido invariable?
- ¿En qué días el peso ha bajado?

Consideraciones adicionales:

- Se puede pedir que a partir de la información que da este gráfico construyan una tabla y/o un gráfico que relacione el tiempo y el peso del bebe. La incorporación de los números negativos y su interpretación es un aspecto interesante en la lectura de los gráficos.

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.2	Resuelve problemas cotidianos, a partir de la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico
Ejercicio núm. 13:	Resolver ejercicios que involucran proporcionalidad directa por medio de tablas de valores, reducción a la unidad y/o ecuaciones.

Situaciones asociadas a la proporcionalidad directa

Actividad 1

Ejemplo A

Tres amigos organizan una microempresa. Deciden instalarse con una panadería y vender, entre otros productos, pan integral. La experiencia casera les indica que un kilogramo de harina les rinde 1,250 kg de pan. Además, por cada kg de harina, necesitan 40 g de levadura y 50 g de manteca vegetal. Para cada día de la primera semana, ellos piensan hacer 30 kg de pan. ¿Cuánta harina integral, levadura y manteca necesitan para hacer el pan de la semana?

Consideraciones adicionales:

- ☐ A veces, los alumnos aprenden una forma de resolver estos ejercicios y la mecanizan sin tener claro por qué hacen determinada secuencia de cálculos, ni tampoco disponen de dispositivos de control sobre los resultados. El uso de una tabla como instrumento ordenador, como apoyo para la reflexión y el desarrollo de los cálculos, favorece el significado de la operatoria.

Pan Kg.	Harina Kg.	Levadura g.	Manteca g.
1.250	1	40	50
12.500			
25.000			
5.000			
30.000			

- ☐ Es necesario afrontar diversos ejercicios que consideren situaciones no proporcionales y de proporcionalidad directa. El proceso de resolución, el análisis de las relaciones entre los datos; el uso de tablas de valores como recurso para ordenar la información, para reflexionar y apoyar el razonamiento correcto; la realización de discusiones y debates; la sistematización de ensayos y la corrección de errores constituyen un buen soporte para lograr la discriminación entre este tipo de ejercicios y disponer de procedimientos de resolución.

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.2	Resuelve problemas cotidianos, a partir de la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico
Ejercicio núm. 14:	Resolver ejercicios que involucran proporcionalidad directa. Reconocer la constante de proporcionalidad, utilizar la representación gráfica y expresar la relación entre las variables.

Ejemplo A Considerando la información siguiente:

U$A 1 = 8.5 pesos Mexicanos y

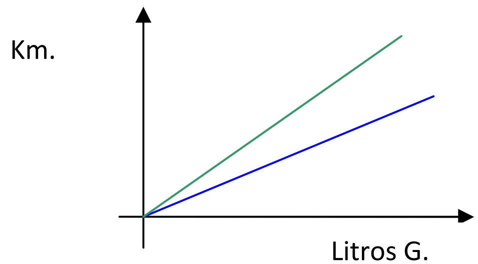
U$A 1 = 25 pesos Cubanos. Construir un gráfico cartesiano que indique la relación entre el valor de los pesos Cubanos y los mexicanos. ¿Cuál es el cambio en pesos Cubanos por un peso Mexicano?

Consideraciones adicionales:

- La construcción de este gráfico permite a los alumnos disponer de un buen instrumento que permite una aproximación adecuada para la conversión y comparación de precios entre ambas monedas.
- Es interesante constatar que basta con ubicar el punto (25; 8,5) y unirlo con el origen para determinar el gráfico pedido.
- Es fundamental que los alumnos resuelvan variados ejercicios de proporcionalidad directa, y relacionen los valores de la tabla con la correspondiente expresión en el gráfico. Este análisis de las relaciones numéricas entre los valores de la variable puede hacerse en una hoja de cálculo.

Ejemplo B

El gráfico siguiente muestra el gasto de gasolina de un mismo vehículo en carretera y en ciudad:



Sin los números en los ejes, ¿cuál de los dos corresponde al rendimiento en carretera? ¿Por qué?

***Consideraciones adicionales*:**

- Es interesante destacar cómo el gráfico informa aunque no incluya los números en los ejes, además de indicar una tendencia. Procurar que los alumnos establezcan las ventajas y desventajas entre el gráfico y la tabla de valores.

Ejemplo C

Una cadena de cines tiene un plan especial para sus socios: pagan una cuota semestral de $500 y el valor de su entrada es $150. Los que no son socios pagan $200 por entrada.

Trazar el gráfico que describe la situación. ¿En qué momento se intersectan ambas rectas?

¿A quiénes les conviene ser socios de cine-arte?

***Consideraciones adicionales*:**

- En este ejemplo, se incluye una situación que no es proporcional, su gráfico intercepta al eje y en el punto 5.000. Sin embargo, es una situación interesante para comparar pendiente, interpretar el punto de intersección de los dos gráficos y analizar una situación que es bastante común en términos de oferta en el mercado.

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.2	Resuelve problemas cotidianos, a partir de la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico
Ejercicio núm. 15:	Resolver ejercicios que involucran proporcionalidad inversa por medio de tablas de valores, reducción a la unidad y/o ecuaciones.

Situaciones asociadas a la proporcionalidad inversa

Ejemplo A La empresa elaboradora de alimentos para animales acostumbra a envasar su producción en bolsas de 3 Kg., 5 Kg., 10 Kg., 15 Kg. y 20 Kg. En esta oportunidad dispone de 15 toneladas a granel y envasarán la misma cantidad de alimento por cada tipo de bolsa. La persona responsable de esta operación hizo la siguiente tabla:

Kg. por bolsa	3	5	10	15	20
Nº de bolsas	1000				

Completar la tabla.

¿Qué tipo de relación hay entre el número de bolsas y la cantidad de kg por bolsa?

¿Cómo se representa esa relación en un gráfico en que los kg por bolsa se ubican en el eje x y el número de bolsas en el eje y?

***Consideraciones adicionales*:**

- Es necesario diferenciar el proceso vinculado a determinar si el ejercicio que resuelven es directa o inversamente proporcional o es no proporcional. En el caso de la proporcionalidad inversa, las razones al interior de una variable no son iguales sino que una es el valor inverso de la otra. Es importante que relacionen la proporcionalidad inversa entre dos variables, en una situación determinada, con el producto constante entre los correspondientes valores de esas variables.

Resolver ejercicios que involucran proporcionalidad inversa. Reconocer la constante de proporcionalidad y utilizar la representación gráfica.

Ejemplo B Considerar la fórmula s = v • t en que s es distancia, v es rapidez media y t es tiempo. Si la distancia es 600 km, ¿qué valores pueden tomar la rapidez media y el tiempo?

Construir una tabla de valores y un gráfico.

***Consideraciones adicionales*:**

- Al hacer la representación gráfica de una situación de proporcionalidad inversa, los alumnos suelen unir los puntos por líneas.
- En la gráfica de esta hipérbole, es interesante que las alumnas y alumnos constaten que esta curva no intercepta los ejes.

Situaciones asociadas a la resolución de ejercicios de porcentaje incluyendo los casos de porcentajes menores que 1 y mayores que 100

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.2	Resuelve problemas cotidianos, a partir de la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico
Ejercicio núm. 16:	Recoger información sobre el uso de los porcentajes en la vida diaria y resolver ejercicios a partir de esa información. Relacionar el cálculo de porcentaje con los decimales y las fracciones; constatar la equivalencia de diversos procedimientos; utilizar el cálculo mental y el cálculo aproximado. Interpretar el tanto por ciento como operador multiplicativo.

Ejemplo A

Los alumnos leen y recortan informaciones de prensa que contengan %'s, sobre temas que les interesen. Entrevistan a familiares o adultos que tengan trabajo remunerado, en relación con los descuentos en los sueldos por aplicación de las leyes sociales. Se informan sobre los descuentos por características de temporada o por aumento de oferta: precios de determinadas frutas y verduras, liquidaciones de temporada, rebajas en pasajes, etc.

Utilizando esas informaciones proponer ejercicios en que esté explícito el referente asociado a 100.

Consideraciones adicionales:

- ☐ Que los alumnos se den cuenta de que el cálculo de porcentajes invade la vida diaria, las páginas de los diarios y otros medios de comunicación; también en el cumplimiento de leyes sociales y otros. A veces aparece más visible en las informaciones de tipo financiero en las que la interpretación requiere otros conocimientos específicos del área.
- ☐ En la información que se pueda recoger importa la profundidad y el nivel de precisión que se puede lograr en relación con determinado tema.

Ejemplo B

Calcular cuál es el precio oferta de los pijamas, si el precio sin rebaja es $5.670.

AHORRE 20%
Selección de pijamas y batas para
DAMA

***Consideraciones adicionales*:**

- ☐ En relación con este ejemplo se pueden plantear, por lo menos, las siguientes maneras correctas de hacer los cálculos:

$$0.8 \cdot 5.670$$
$$5.670 - 0.2 \cdot 5.670$$
$$5.670 : 5 \cdot 4$$
$$5.670 - 5.670 : 5$$
$$5.670 - 5.670 \cdot 0.1 \cdot 2$$

- ☐ Es importante incentivar el cálculo aproximado, el uso de las fracciones y/o de los números decimales para la resolución de ejercicios de porcentaje.

Ejemplo C

Si el valor de una cuota por un pago mensual en una cooperativa es $27.555 y se reajusta mensualmente según el precio de los CETES, ¿cuál es el precio para la cuota de mayo, si los CETES del mes de abril fue igual 0.6%?

***Consideraciones adicionales*:**

- Es necesario conversar e informar sobre los CETES, su sentido e incidencia en numerosas situaciones.
- En relación con los cálculos, será interesante impulsar el uso de la calculadora y preocuparse de la correcta interpretación de los resultados.
- Es probable que algunos alumnos se equivoquen y calculen el 6% y no el 0.6%. Ante este error, que es bastante común, es interesante conducir la reflexión hacia el cálculo del 1%; el resultado del 1% debiera ser mayor que el que corresponde al 0.6%.
- Una tabla de valores permite ordenar y procesar en forma razonada la información.

Cuota abril	100	27555
Incremento	.6	
Cuota mayo	100.6	

- Otro apoyo para este cálculo es el ordenamiento de los datos en una ecuación para determinar el factor de conversión de las cuotas: 27.555 • 1,006 es el valor de la nueva cuota.
- En el mundo del comercio y en el ámbito financiero, suele ser habitual establecer el factor de conversión y en seguida operar con éste.

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.2	Resuelve problemas cotidianos, a partir de la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico
Ejercicio núm. 17:	Resolver ejercicios de cálculo de porcentaje en los que el referente asociado a 100 no está explícito. Relacionar el cálculo de porcentaje con los decimales y las fracciones, Interpretar el tanto por ciento como operador multiplicativo. Calcular porcentajes sucesivos y porcentajes promedios.

Situaciones relacionadas con la resolución de ejercicios para reconocer el referente asociado a 100 que no está explícito

Ejemplo A

Considerando el siguiente recibo de sueldo, determinar el sueldo total.

```
R&S Cía Ltda Fono-Fax 000000
              Recibo de sueldo
                                        Fecha
Nombre
Sueldo total
ISR (12,5%)
ISSSTE (7%)
Total descuentos
Sueldo líquido        $ 177.100
```

Consideraciones adicionales:

- ☐ Al resolver este ejercicio, la tendencia de muchos alumnos es asociar el sueldo líquido con 100.
- ☐ Para algunos alumnos puede ser de gran utilidad la visualización de la información en líneas como los del dibujo, que tienen distinta gradación y que permiten visualizar la relación entre los datos.

- ☐ Otro recurso es la tabla de valores; su construcción y uso puede contribuir al razonamiento correcto y a ordenar la realización de los cálculos:

Salario	100%	
Descuento	19.5%	
Neto a cobrar	80.5%	

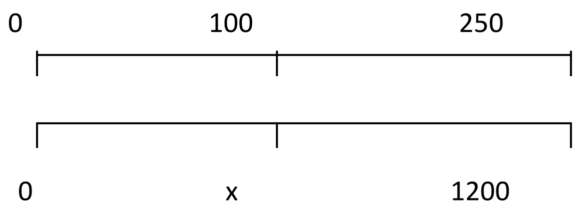
- Si el propósito es determinar el factor de conversión, es conveniente recurrir al ordenamiento de la información en una ecuación:
  x – 0.195x = 177.100.
  Al resolverla se obtiene 177.100 : 0.805
- Es muy importante que los alumnos utilicen una ecuación para calcular el factor de conversión y discernir si lo que corresponde para la resolución del ejercicio en cuestión es multiplicar o dividir por dicho factor.

Ejemplo B

La superficie sembrada en el Estado de México se incrementó, en este año, en un 150% en relación al año anterior. Si actualmente la superficie es 1.200 ha, ¿cuál era la superficie sembrada el año anterior?

Consideraciones adicionales:

- Es fundamental que los alumnos relacionen el cálculo de porcentaje con las fracciones. En este ejemplo se incrementa en 3/2 y el total corresponde a 5/2.
- La representación gráfica puede contribuir a una buena interpretación:



- Es necesario que los alumnos distingan la expresión ‘aumentó o disminuyó en un N%’ de …

Ejemplo C

Si los precios suben y bajan sucesivamente un 10% ¿cuál es la variación de precios entre la situación inicial y la final? Y, si bajan y suben sucesivamente un 10%, ¿es el mismo resultado anterior?

***Consideraciones adicionales*:**

- Los alumnos tienden a no hacer cálculos y responden que no hay variación alguna.
- Es necesario proponer diversos ejercicios de este tipo, utilizar diversas representaciones: tablas de valores o ecuaciones para lograr que visualicen el cambio de referente.
- Algunos alumnos necesitan un supuesto numérico que se asocia a 100; otros pueden reflexionar utilizando 100 como referente inicial.

Ejemplo D

De acuerdo a la información del INEGI, en el año 2004 la población de 20 a 64 años de edad y la fuerza de trabajo en el Estado de México eran los siguientes:

	Población	Fuerza de Trabajo	%
Mujeres	6774000	2547340	
Hombres	6601000	4240800	

¿Cuál es el porcentaje promedio que alcanzó la fuerza de trabajo durante ese año?

***Consideraciones adicionales*:**

- La tendencia de muchos alumnos es calcular los porcentajes para cada caso; con esos resultados calculan el promedio: los suman y dividen por dos. Es importante que reflexionen sobre el significado de esa operatoria y comparen con los valores que corresponden a los totales. ¿En qué casos se podría calcular el promedio de los porcentajes y éste coincide con el porcentaje promedio?

Situaciones relativas a la generalización del cálculo de porcentaje

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.2	Resuelve problemas cotidianos, a partir de la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico
Ejercicio núm. 18:	Utilizar el lenguaje simbólico en el cálculo de porcentaje..

Ejemplo A

Verificar que a% de b es lo mismo que el b% de a. Utilizan esta igualdad para facilitar algunos cálculos, tales como el 16% de 25, 17,3% de 50. etc.

Ejemplo B

Constatar que el a% del b% de c es igual al producto abc 10^{-4}

Consideraciones adicionales:

- Es muy importante que los alumnos se percaten que el trabajo con el lenguaje simbólico tiene una enorme potencialidad.
- Para el cálculo de los operadores, es interesante que utilicen la expresión **C + a% C** en que **C** es el referente asociado a 100 sobre el que se aplica un porcentaje **a**.

En esta parte se focaliza la atención en el aprendizaje del cálculo de productos y factores. Se orienta al desarrollo de la capacidad de generalización apoyada en una sistematización del lenguaje simbólico.

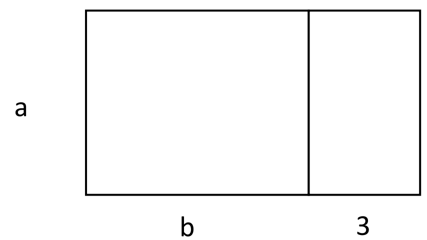
Este tema ya se ha cursado en la enseñanza media, el cálculo de los productos notables. Aquí se incorpora este mismo tema considerando como conocimientos previos la operatoria aritmética y el cálculo de áreas de rectángulos. En esta perspectiva se hace hincapié en el carácter generalizador aportado por el álgebra.

Es necesario, sobre todo para facilitar los aprendizajes posteriores, que nuestros alumnos tengan un dominio sobre la operatoria simbólica; que reconozcan los productos notables y sus factores, que la aritmética y la geometría le den significado a estos procedimientos: que éstos no se transformen en meros artilugios sino que los alumnos puedan utilizarlos para la resolución de ejercicios, para la demostración de propiedades, para pensar.

Situaciones asociadas al manejo fluido de la operatoria simbólica básica

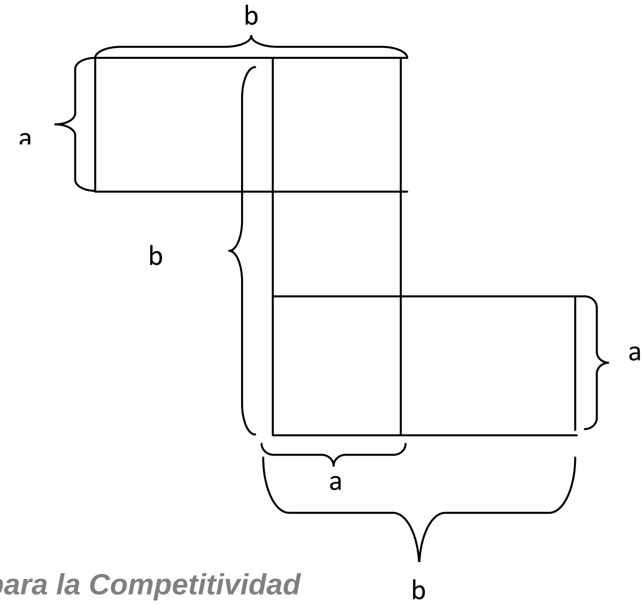
Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.2	Resuelve problemas cotidianos, a partir de la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico
Ejercicio núm. 19:	Calcular productos entre polinomios cualesquiera, determinar factores, eliminar paréntesis y reducir términos semejantes. Ejercitar el cálculo de productos y de factores.

Ejemplo A Calcular el área de un rectángulo si un lado mide a cm. y el otro mide b + 3 cm.



Calcular la medida de los lados de un rectángulo si su área es $(a^2 + ab)$ cm^2.

Calcular el área de una figura como la siguiente, formada por la superposición de tres rectángulos, si los tres rectángulos tienen las mismas medidas a y b.



Consideraciones adicionales:

- Por medio de este tipo de actividad, se busca establecer relaciones entre el cálculo de productos y factores en álgebra con el cálculo de medidas en figuras geométricas y con cálculos aritméticos.
- Si es necesario, los alumnos podrán dar valores numéricos a las letras que se utilicen, para constatar cómo éstas pueden representar una diversidad de valores. En el último ejemplo, hay algunas restricciones a estos valores: el largo debe ser mayor que el doble del ancho.
- En general, la valoración de expresiones puede ser una manera que permita identificar la escritura del producto y además puede ser utilizada para apoyar el desarrollo de habilidades de cálculo mental y de aproximaciones.

Ejemplo B

Comparar un cálculo del producto de dos números con el cálculo de su expresión simbólica.

En este caso, 234 x 56 con (100a + 10b + c) • (10d + e).

```
 234 • 56
 ________
    1.404
  1.170
 ________
   13.104
```

¿Qué valores deben asumir a, b, c, d, e, para que la multiplicación simbólica corresponda a la numérica?

Identificar las líneas del cálculo numérico con las correspondientes expresiones simbólicas.

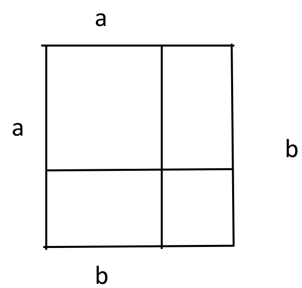
***Consideraciones adicionales*:**

- Es fundamental que los alumnos relacionen la multiplicación de monomios, binomios y trinomios con la forma en que se hace el cálculo por escrito del producto de dos números; que se den cuenta de que se trata de lo mismo con diferente nivel de generalidad.

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.2	Resuelve problemas cotidianos, a partir de la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico
Ejercicio núm. 20:	Reconocer los productos notables, calcular y expresar esos productos como factores.

Ejemplo A Calcular el área de un cuadrado si sus lados miden a + 5 cm.

Ejemplo B Calcular áreas de cuadrados en los que la medida de los lados se expresa como suma de dos números cualesquiera.



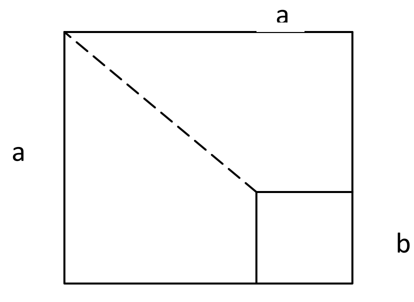
Recortar los cuadrados y rectángulos interiores, como rompecabezas; armar y desarmar el cuadrado de lado a + b.

***Consideraciones adicionales*:**

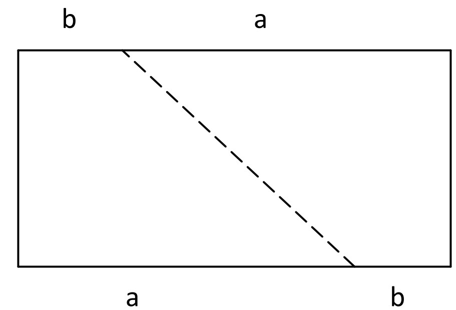
- El aprendizaje del cálculo del cuadrado del binomio con apoyo en la representación del área del cuadrado contribuye a distinguir **$(a + b)^2$ de $(a^2 + b^2)$**
- Es interesante que los alumnos evalúen expresiones de la forma a2 + 2ab + b2, para diversos valores de a y b; que constaten que siempre son cuadrados perfectos.
- Que calculen la medida de los lados de cuadrados cuya área sea igual a un trinomio cuadrado perfecto y también incluir aquellos que no sean cuadrados perfectos. Esto permite establecer relaciones con las raíces cuadradas y los números irracionales.
- Después de armar y desarmar estos rompecabezas, de hacer variados ejercicios, llegar a la generalización del cálculo del cuadrado del binomio.

Ejemplo C

Para apoyar la generalización del cálculo de la suma por diferencia se puede proponer un rompecabezas como el siguiente.
La figura que sigue está formada por un cuadrado de lado **a** al que se le ha quitado un cuadrado más pequeño de lado **b**.



Si se corta por la línea punteada que une los vértices superiores izquierdos de ambos cuadrados, se obtienen dos piezas de rompecabezas.
Armar con esas piezas el rectángulo que sigue.



Calcular el área de ambas figuras y expresarla, en cada caso, en la forma que les parezca más adecuada para cada una.

Consideraciones adicionales:

- Este rompecabezas puede ayudar a que las alumnas y alumnos representen desde lo geométrico el significado de la diferencia de dos cuadrados.
- Para apoyar se representación aritmética se puede plantear cálculo mental considerando números que permitan el uso de la suma por diferencia (52 • 48, por ejemplo).

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.2	Resuelve problemas cotidianos, a partir de la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico
Ejercicio núm. 21:	Resolver ejercicios de diversos ámbitos, que involucran operatoria simbólica. Analizar fórmulas de volúmenes, áreas y perímetros y los cambios que se generan por variaciones en las medidas lineales de las figuras. Plantear demostraciones sencillas.

Situaciones relativas a la resolución de ejercicios y demostraciones que involucran operatoria simbólica.

Ejemplo A

Si se duplica la arista de un cubo. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

Ejemplo B

Considerar expresiones como 2ab, 2ab2 y (2ab)2. Analizar las variaciones que provoca un cambio en a o en b, desde la perspectiva simbólica. Este análisis se puede apoyar en un dibujo como el que sigue:

$2ab$ > se duplica b > $4ab$

$2ab^2$ > se duplica b > $8ab^2$

$(2ab)^2$ > se duplica b > $16a^2b^2$

Desde una mirada geométrica, puede considerarse **ab** como el área de un rectángulo de lados **a** y **b**; la expresión **ab2** se puede asociar con el volumen de un prisma de base cuadrada. Imaginar las figuras iniciales y aquéllas en las que se ha duplicado el valor de **b**.

Establecer las relaciones entre lo simbólico y lo geométrico. Dibujar las figuras si se considera necesario.

Consideraciones adicionales:

- Para que los alumnos lleguen a discriminar las variaciones en una fórmula, si la variable está a la primera, segunda o tercera potencia es un desafío que está muy ligado a la sintaxis del lenguaje simbólico: al significado del uso de los paréntesis, a la diferencia entre aditivo y multiplicativo.

Ejemplo C

Demostrar que la suma de tres potencias consecutivas de 2, es siempre divisible por 7.

Consideraciones adicionales:

- Es altamente probable que muchos alumnos, antes de afrontar este ejercicio en forma general, constaten primero para algunos casos concretos. Es necesario observar si tienen dificultad para anotar una potencia de 2 y su consecutiva.
- Es importante que los alumnos logren diferenciar una demostración de una constatación, aunque ésta la puedan realizar para muchos casos particulares.
- Este ejemplo se puede complementar con preguntas como las siguientes:

  ¿Por cuánto es divisible la suma de dos potencias consecutivas de 2?

  ¿Por cuánto es divisible la suma de dos potencias sucesivas de 5? ¿Y si son potencias de 10?

Ejemplo D

Demostrar que el cuadrado de un número impar es también impar.

Ejemplo E

Demostrar que la diferencia entre dos cuadrados consecutivos es siempre impar.

Ejemplo F

Demostrar que el cuadrado de un número impar, menos 1, es siempre múltiplo de 8.

***Consideraciones adicionales*:**

- En forma similar al ejemplo anterior, muchos alumnos tienen dificultades para llegar a expresar formas generales para categorías de números.
- Como en cualquier resolución de ejercicios siempre es interesante observar qué estrategias utilizan los alumnos para afrontarlo y resolverlo, cuál es la interacción que se da en los grupos de trabajo, etc.

Ejemplo G

Visualizar las siguientes regularidades:

$$31 \bullet 39 < 32 \bullet 38 < 33 \bullet 37 < 34 \bullet 36 < 35^2$$

***Consideraciones adicionales*:**

- Este ejemplo se puede constatar con calculadora. Se puede complementar planteando si es una regularidad presente para todos los números de dos cifras. ¿Cómo se podría demostrar? ¿Hay alguna regularidad en las diferencias que determina la desigualdad? ¿Por qué?

Situaciones acerca de la evolución del lenguaje simbólico

Unidad de aprendizaje I:	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.
Resultado de aprendizaje: 1.2	Resuelve problemas cotidianos, a partir de la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico
Ejercicio núm. 22:	Recoger información sobre la incorporación de las letras al lenguaje simbólico y algunos antecedentes de los cambios que se han producido a lo largo del tiempo.

Ejemplo **A**

Hacer un listado de fórmulas de áreas, perímetros, volúmenes. Imaginar que no se usan la letras para representar números y buscar formas de recordar las fórmulas sin ese tipo de notación.

Ejemplo **B** Recoger información sobre la historia de la matemática y el uso de las letras.

Ejemplo **C** Conversar con científicos, con PSP´s de química, biología o física y realizar breves encuestas acerca del papel del lenguaje simbólico en su disciplina.

Ejemplo **D**

Inventar expresiones simbólicas con paréntesis y resolverlas.

$$3a - (2b + a) = 2(a - b)$$

Escribirlas sin paréntesis y evaluar las diferencias.

Consideraciones adicionales:

- Que los alumnos se den cuenta que la escritura simbólica tiene historia. Ellos podrían averiguar en relación con otros lenguajes, como la escritura de la música, y visualizar los cambios experimentados con el paso del tiempo y la presencia de ejercicios que es necesario resolver.

Nombre del alumno:	
Grupo:	
Unidad de aprendizaje II:	Modelado matemático de problemas.
Resultado de aprendizaje: 2.1	Resuelve problemas de la vida cotidiana, aplicando operaciones aritméticas básicas, exponentes y radicales con expresiones algebraicas.
Ejercicio núm. 23:	Resuelve ejercicios teóricos y prácticos aplicando operaciones aritméticas básicas, exponentes y radicales con expresiones algebraicas.

1. $5 + 6x = 2$

2. $4b + 1 = -18$

3. $18c - 3 = 0$

4. $5 - 2d = 9$

5. $- 3f + 1 = 4$

6. $- 2 - 5g = 0$

7. $13 - h = 13$

8. $5j - 9 = 3j + 5$

9. $2k + 7 = 12 - 3k$

10. $10 - 4x = 7 - 6x$

11. $5m - 3{,}2 = 2m + 2{,}8$

12. $5n - 2n + 12 = 35 - 4n - 9$

13. $3ñ - 15 + 2ñ - 14 = ñ - 11$

14. $48p - 13 + 12p = 72p - 3 - 24p$

15. $q - 3 + 6q - 9 + 12q - 15 = q$

16. $6r + 12r - 9 - 8r + 10 + r = 0$

17. $5s + (4 - s) = 9 - (s - 6)$

18. $(3t - 1) + 7 = 8t - (3 - 2t)$

19. $3 - (8v-5) + (6-7v) - 1 = 7 - (v-1) + (4v+4)$

20. $(3w - 8) - (4 - 9w) + 3 = 7w - 2 - (5w + 9 - 3)$

21. $-(4x-6+5x) + (9-5x+3-2x) = 7x - (1 - 6x)$

22. $12y = 3(3y - 5)$

23. $3z - 1 = 2(z - 1)$

24. $2(b + 2) - 5(2b - 3) = 3$

25. $7 - 6(c - 1) + 3(3 - 4c) = 7 + (7c - 4)$

26. $4-2(d + 7)-(3d + 5)=2d+(4d-9+3d)-(d - 3)$

27. $8(6f - 14)-7(12 - 5f)+(23f + 2)-(2f + 65) = 0$

28. $21 - [5g - (3g - 1)] - g = 5g - 12$

29. $40h - [24 - (6h + 8) - (5 - 2h)] = 3-(8h - 12)$

30. $3[2 - (3j - 6)] + 4[6j - (1 - 2j)] = 4 - 5j$

31. $2 - \{k - [6k - (1 - 2k)]\} = 100$

32. $3[2x - (5x + 2)] + 1 = 3x - 9(x -3)$

33. $2 - \{2m + [2m - (2 - 2m)]\} = 2$

34. $34 - 52(12n - 34) + 235 = 32 + 101(35n - 1)$

35. $2 - (3ñ + 4)-(5ñ - 6)-(7ñ - 8)-(9ñ - 10) = 11$

36. $2[7p - 2(p - 1)] + 3(4p + 7) = 5 - (p - 1)$

37. $8\{2 - [q + 2(q - 3)] + 1\} = 3 - (8 - 3q)$

38. $2 - 3(r - 7) - 7r = 4(r - 2) + 8$

39. $33{,}7 - (1{,}5s + 2{,}3) = 3{,}4s - (0{,}4 - 5{,}7s)$

40. $(t - 3)^2 - (t - 2)^2 = 5$

41. $(2v - 4)^2 + 6v - 3 = 4v^2 - (3v - 1)$

42. $(w + 3)^2 + 4 = (w - 2)^2 + 5w - 2$

43. $(3x - 3)^2 - (2x - 7) = (3x - 5)(3x + 5)$

44. $2 - (y + 1)^2 = 5 - 3[y - (5y + 9)] - y^2$

45. $6z - 1 + 2z + 5z - 9 - 234 = 999$

46. $2\{x - [x - (x - 1)]\} + (x + 2) = 256$

47. $(x - 7)^2 - (1 + x)^2 = 2(3x - 4)$

48. $6x - (2x - 1)(2x + 1) = 2 - (3 + 2x)^2$

49. $7 - [8x - 3(x + 3)] = 5x - (4 - 2x)$

50. $1 - a = 1$

51. $b/5 = ½$

52. $2.c/7 = ¾$

53.- $\frac{27 + d}{4} - 3 + d$

54.- $\frac{e - 5}{9} = \frac{e - 25}{5}$

55.- $\frac{2f + 13}{3} - \frac{6 - f}{4} = 1$

56.- $\frac{g + 3}{4} + \frac{4g}{5} = 5$

57.- $\frac{6 - h}{4} - \frac{3h + 10}{3} = 2$

58.- $\frac{3(i - 1)}{4} + \frac{5i - 7}{4} = \frac{3}{2}$

59.- $j - \frac{2 + j}{6} = \frac{1}{2}$

60.- $\frac{k - 32}{40} - k + 7$

61.- $\frac{5m - 2}{3} + 4 = 8 - 5m$

62.- $\frac{4 - 9n}{5} - \frac{2(3 - 4n)}{2} - 1 = n$

63.- $\frac{8(ñ - 4)}{3} + 2 = ñ - \frac{5(ñ - 1)}{2}$

64.- $\frac{8p - 7}{3} + \frac{2p - 1}{4} = 5 - 2p$

65.- $\frac{6(q - 9)}{4} + \frac{3q - 9}{5} - 2 = q + \frac{2 - 4q}{3}$

66.- $\dfrac{8r-7}{9}+\dfrac{3r-4}{5}-2=r-\dfrac{3r-2}{7}$

67.- $\dfrac{9s-8}{7}+2=\dfrac{5(8-3s)}{3}+4$

68.- $\dfrac{8-13t}{5}-\dfrac{3(8+4t)}{2}+4=5-\dfrac{6t-7}{8}$

69.- $\dfrac{9u-9}{10}+1=u-\dfrac{3u-5}{2}+\dfrac{1}{4}$

70.- $\dfrac{7v-8}{10}-\dfrac{5v+2}{3}-1=4-\dfrac{8v-4}{3}$

71.- $\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{5-2w}{3}\right)+4=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8-w}{3}\right)$

72.- $\dfrac{8(3x-4)}{2}+1-\dfrac{3}{3}\left(\dfrac{5x-4}{3}\right)=x$

73.- $\dfrac{8y-3}{4}-5-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{8+4y}{4}\right)=\dfrac{1}{5}$

74.- $\dfrac{7z-3}{2}+\dfrac{8-5z}{3}+\dfrac{9z-3}{4}-\dfrac{5z-7}{6}=1$

75.- $\dfrac{4a-9}{6}-\dfrac{3(5-2a)}{8}+1=\dfrac{a-2}{3}+a$

76.- $\dfrac{9b-3}{2}+1=5-\dfrac{2b-4}{3}-\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{5b-4}{2}\right)$

77.- $\dfrac{7c-4}{10}-\dfrac{2c-9}{5}+2=\dfrac{3c-4}{3}+1$

78.- $\dfrac{7d-3}{4}+\dfrac{5(2d-9)}{7}+4=21$

79.- $\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{2(5-2e)}{3}\right)-e=\dfrac{1}{2}-3e$

80.- $\dfrac{2f-9}{7}+2=\dfrac{5(2f-3)}{4}+5$

81.- $\dfrac{7g-21}{3}-\dfrac{2g-7}{4}+1=5g-2$

82.- $\dfrac{8h-7}{3}+\dfrac{4(2h-5)}{6}-1=\dfrac{7h-4}{2}$

83.- $\dfrac{8i-6}{4}+\dfrac{5i-3}{2}+i=5-\dfrac{2i-3}{2}$

84.- $\dfrac{7j-3}{4}+\dfrac{5(2j-4)}{3}=1-\dfrac{2j-5}{7}$

85.- $\frac{3k-4}{2}-\frac{5k-4}{3}+1=k-\frac{2}{3}$

86.- $\frac{9m-7}{6}-\frac{3m-4}{5}+2=\frac{7-2m}{10}$

87.- $\frac{8n-7}{6}+\frac{5(2n-1)}{4}-10=n-\frac{5}{3}$

88.- $\frac{7(p-2)}{10}-\frac{4p-9}{7}=1$

89.- $\frac{4q-7}{3}+\frac{2q-4}{5}-\frac{2q+3}{3}=\frac{1}{2}-q$

90.- $\frac{8r-9}{10}+\frac{7r-11}{25}=\frac{7r}{2}+1$

91.- $\frac{8s-9}{100}+\frac{7s-2}{25}-\frac{3+2s}{30}=\frac{s}{750}$

92.- $\frac{9-7t}{3}+\frac{27-4}{4}=\frac{8t-9}{6}+2$

93.- $\frac{7u-9}{2}-\frac{5u-4}{3}+\frac{7u-9}{9}=\frac{1}{18}$

94.- $\frac{8-9v}{4}+\frac{v}{16}-\frac{1}{2}=v-(2v-5)$

95.- $\frac{8w-7}{4}+\frac{9-3w}{2}-1=w-\frac{5(2w-3)}{2}$

96.- $\frac{8-2x}{3}+\frac{5-2x}{7}+4=5-(8x-6)+\frac{1}{2}$

97.- $\frac{3y-4}{6}+\frac{8y-2}{3}+1=5(3y-4)-2$

98.- $6+(2x-5)-(3x+4)-\frac{x+1}{2}=2$

99.- $\frac{7x-4}{2}-\frac{3x-2}{5}+2=\frac{6x-3}{4}$

Soluciones:

1. -1/2
2. -19/4
3. 1/6
4. -2
5. -1
6. -2/5
7. 0
8. 7
9. 1
10. -3/2
11. 2
12. 2
13. 9/2
14. 5/6
15. 3/2
16. -1/11
17. 11/5
18. 9/7
19. 1/18
20. 1/10
21. 19/29
22. -5
23. -1
24. 2
25. 19/25
26. -9/13
27. 259/104
28. 4
29. ½
30. -4/7
31. 99/7
32. -32/3
33. 1/3
34. 2106/4159
35. 19/24
36. -19/23
37. 77/27
38. -21/8
39. 3
40. 0
41. 12/7
42. -11/5
43. 41/20
44. -31/14
45. 1243/13
46. 256/3
47. 28/11
48. -4/9
49. 5/3
50. 0
51. 5/2
52. 21/8
53. 5
54. 50
55. -2
56. 5
57. -46/15
58. 2
59. 1
60. -8
61. 7/10
62. 8/3
63. 67/25
64. 91/62
65. 539/73
66. 734/223
67. 173/66
68. -491/314
69. 53/28
70. 78/17
71. 47/4
72. 127/89
73. 159/25
74. -7/39
75. 137/26
76. 73/71
77. 16/3
78. 677/89
79. -71/4
80. -15/62
81. -27/38
82. 28/3
83. 19/13
84. 767/451
85. 6/7
86. -28/33
87. 169/34
88. 26/3
89. 139/62
90. -117/121
91. 135/146
92. 9/19
93. 76/47
94. -56/19
95. 23/18
96. 173/296
97. 130/71
98. -11/3
99. -23/28

Nombre del alumno:	
Grupo:	
Unidad de aprendizaje II:	Modelado matemático de problemas.
Resultado de aprendizaje: 2.1	Resuelve problemas de la vida cotidiana, aplicando operaciones aritméticas básicas, exponentes y radicales con expresiones algebraicas.
Ejercicio núm. 24:	Resuelve problemas teóricos y prácticos aplicando operaciones aritméticas básicas, exponentes y radicales con expresiones algebraicas.

1. ¿Cual es el número que multiplicado por dos es cuatro unidades menos que 3 veces 6.
a) 7 b) 8 c) 9 d) 6 e) no se puede

2. El cuadrado de la suma de dos números consecutivos es 81. Hallar la diferencia del triple del mayor y el doble del menor.
a) 9 b) 8 c) 7 c) 12 e) 10

3. ¿Cuál es el número que excede a 24 tanto como es excedido por 56?
a) 32 b) 36 c) 40 c) 42 e) 38

4. El exceso de un número sobre 20 es igual al doble del exceso del mismo número sobre 70. Hallar el número disminuido en su cuarta parte.
a) 120 b) 80 c) 90 c) 110 e) 98

5. El costo del envío de un paquete postal de "P" kg. es de s/.10 por el primer kilogramo y de s/.3 por cada kilogramo adicional. Entonces el costo total de envío de dicho paquete es:
a) 10 + 3p b) 10 – 3p c) 10 + 3(p + 1) d) 10 + 3(p-1) e) 10 - 3(p - 1)

6. En un corral se cuentan 88 patas y 30 cabezas. Si lo único que hay son gallinas y conejos, ¿cuál es la diferencia entre el número de gallinas y el de conejos?
a) 2 b) 8 c) 7 c) 0 e) 1

7. En un examen un alumno gana dos puntos por cada respuesta correcta, pero pierde un punto por cada equivocación. Después de haber contestado 40 preguntas obtiene 56 puntos. ¿Cuántas correctas contesto?
a) 32 b) 28 c) 36 c) 24 e) 38

8. A cierto número par, se le suma el par de números pares que le preceden y los dos números impares que le siguen obteniéndose 968 unidades en total. El producto de los dígitos del número par en referencia es:
a) 162 b) 63 c) 120 c) 150 e) 36

9. En una reunión se cuentan tantos caballeros como 3 veces el número de damas. Después que se retiran 8 parejas el número de caballeros que aun quedan es igual a 5 veces el número de damas. ¿Cuántos caballeros había inicialmente?

a) 16 b) 32 c) 72 c) 64 e) 48

10. En una clase de Álgebra de “m” alumnos; “n duermen, “p” cuentan chistes y el resto escucha clases. ¿Cuál es el exceso de los que duermen y cuentan chistes sobre los que atienden?

a) n + 2p – m b) 2n+ 2p + m c) 2n+ 2p - m d) n + p + m e) ninguna

11. Yo tengo el triple de la mitad de lo que tú tienes, más 10 pesos; pero si tuvieras el doble de lo que tienes, tendrías 5 pesos más de lo que tengo. ¿Cuánto tengo?

a) 52 pesos b) 53 pesos c) 54 pesos c) 55 pesos e) 56 pesos

12. Ciento cuarenta y cuatro manzanas cuestan tantos pesos como manzanas dan por s/.169. ¿Cuánto vale dos docenas de manzanas?

a) s/.26 b) s/.25 c) s/.13 c) s/.15 e) s/.12

13. Un niño sube por los escalones de una escalera de 2 en 2 y las baja de 3 en 3, dando en cada caso un número exacto de pasos. Si en la bajada dio 10 pasos menos que en la subida. ¿Cuántos escalones tiene la escalera?

a) 45 b) 50 c) 55 c) 60 e) 65

14. En una reunión hay “m” mujeres más que hombres y cuando llegan “n” parejas resulta que el número de hombres constituyen los 3/8 de la reunión. ¿Cuántos hombres había inicialmente?

a) $\frac{3m+2n}{2}$ b) $\frac{m+n}{3}$ c) $\frac{m-n}{3}$ d) $\frac{m+n}{2}$ e) $\frac{3m-2n}{2}$

15. Un anciano deja una herencia de “2mn” pesos a un cierto número de parientes. Sin embargo “m” de estos renuncia a su parte y entonces cada uno de los restantes se beneficia en “n” pesos más. ¿Cuántos son los parientes?

a) m + n b) m2+ m- n c) m2+ n d) 2m e) m2+ mn + n

16. Por cada televisor que se vende se gana “m” pesos. Si se ha ganado “n” pesos y aun sobran “a” televisores; ¿cuántos televisores se tenia al inicio?

a) $\frac{n+am}{a}$ b) $\frac{m+an}{n}$ c) $\frac{m+na}{ma}$ d) $\frac{a+mn}{n}$ e) $\frac{n+ma}{m}$

17. Si los alumnos se sientan de tres en tres en la carpetas habrían dos carpetas vacías pero si se sientan de dos en dos se quedarían de pie 6 de ellos. ¿Cuántas carpetas quedarían vacías si se sentaran 3 alumnos en la primera carpeta, 2 en la segunda, 3 en la tercera, 2 en la cuarta y así sucesivamente?

a) 2 b) 3 c) 4 d) ninguna e) 1

18. Si un litro de leche pura pesa 1032 gramos. Calcule la cantidad de agua que contiene 11 litros de leche adulterada, los cuales pesan 11,28 kg.

a) 3 l b) 4 l c) 3,26 l c) 2,25 l e) 2 l

19. Un caballo y un mulo caminaban juntos llevando sobre sus lomos pesados sacos. Lamentábase el jamelgo de su enojosa carga a lo que el mulo le dijo: "¡de que te quejas!, si yo te tomara un saco mi carga seria el doble de la tuya. En cambio si yo te doy un saco, tu carga se igualaría a la mía”. ¿Cuántos sacos llevaba el caballo y cuantos el mulo?

a) c = 6 ; M = 8 b) c = 3 ; M = 6 c) c = 5 ; M = 6 d) c = 7 ; M = 5 e) c = 7 ; M = 9

20. Un microbús parte de la plaza Grau con dirección al Callao y llega al paradero final con 43 pasajeros. Sabiendo que cada pasaje cuesta 2 pesos, y que ha recaudado en total 120 pesos, y en cada paradero bajaba un pasajero pero subían tres. ¿Cuántos pasajeros partieron del paradero inicial?

a) 6 b) 8 c) 9 c) 11 e) 15

21. Un número excede a otro en 5 y su suma es 29. ¿Cuáles son?

22. La diferencia entre dos números es 8. Si se le suma 2 al mayor el resultado será tres veces el menor. Encontrar los números.

23. ¿Cuáles son los números cuya suma es 58 y su diferencia 28?

24. Encontrar un número tal que su exceso sobre 50 sea mayor que su defecto sobre 89.

25. Si a 288 se le suma un cierto número el resultado es igual a tres veces el exceso del número sobre 12. Encontrar el número.

26. Dividir 105 en dos partes una de las cuales disminuida en 20 sea igual a la otra disminuida en 15.

27. Encontrar tres números consecutivos cuya suma sea 84.

28. La suma de dos números es 8 y si a uno de ellos se le suma 22 resulta 5 veces el otro. ¿Cuáles son los números?

29. Encontrar dos números que difieran en 10 tales que su suma sea igual a dos veces su diferencia.

30. La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es 121. Hallar los números.

31. El área de un terreno circular más el doble de su radio es 250 m2. Hallar el radio y el área del terreno.

32. La diferencia de dos números es 3 y la diferencia de sus cuadrados es 27. Hallar los números.

33. Dividir $380,000 entre A, B y C de modo que B tenga $30.000 mas que A, y C tenga $20.000 más que B.

34. Un padre es cuatro veces mayor que su hijo; en 24 años mas el tendrá el doble de la edad de su hijo. Encontrar sus edades.

35. La edad de A es 6 veces la edad de B y en 15 años mas la edad de A será el triple de la edad de B. Hallar ambas edades.

36. La suma de las edades de A y B es 30 años y 5 años después A tendrá el triple de la edad de B. Hallar sus edades actuales.

37. En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas, son 50, si las patas, son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

38. Un granjero cuenta con un determinado número de jaulas para sus conejos. Si introduce 6 conejos en cada jaula quedan cuatro plazas libres en una jaula. Si introduce 5 conejos en cada jaula quedan dos conejos libres. ¿Cuántos conejos y jaulas hay?

39. En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase?

40. En la granja se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?

41. Se quieren mezclar vino de 600 pesos. con otro de 35o pesos, de modo que resulte vino con un precio de 50 pesos el litro. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 200 litros de la mezcla?

42. Al comenzar los estudios de Bachillerato se les hace un test a los estudiantes con 30 cuestiones sobre Matemáticas. Por cada cuestión contestada correctamente se le dan 5 puntos y por cada cuestión incorrecta o no contestada se le quitan 2 puntos. Un alumno obtuvo en total 94 puntos. ¿Cuántas cuestiones respondió correctamente?

43. En mi clase están 35 alumnos. Nos han regalado por nuestro buen comportamiento 2 lápices a cada chica y un cuaderno a cada chico. Si en total han sido 55 regalos, ¿cuántos chicos y chicas están en mi clase?

44. Un ama de casa compra en un supermercado 6 Kg. de café y 3 de azúcar, por lo que paga 1530 pesos Ante la amenaza de nuevas subidas, vuelve al día siguiente y compra 1 Kg. de café y 10 Kg. de azúcar por lo que paga 825 pesos No se fija en el precio y plantea el problema a su hijo de 13 años. Este después de calcular lo que su madre hubiera pagado por 6 Kg de café y 60 de azúcar halla el precio de cada artículo. ¿Podrías llegar tú a resolver el problema?

45. Con 10000 pesos que le ha dado su madre Juan ha comprado 9 paquetes de leche entera y leche semidesnatada por un total de 960 pesos. Si el paquete de leche entera cuesta 115 pesos y el de semidesnatada 900 pesos. ¿Cuántos paquetes ha comprado de cada tipo?

46. En un puesto de verduras se han vendido 2 Kg de naranjas y 5 Kg de papas por 835 pesos y 4 Kg de naranjas y 2 Kg de papas por 1.285 pesos Calcula el precio de los kilogramos de naranja y papa.

47. Un comerciante de ultramarinos vende el Kg de azúcar a 1200 pesos Además, tiene café de dos clases; cuando toma 2 Kg de la primera calidad y 3 Kg de la segunda resulta la mezcla a 750 pesos el Kg y cuando toma 3 Kg de la primera clase y 2 Kg de la segunda entonces resulta la mezcla a 800 pesos el Kg ¿Cuál es el precio de cada calidad de café?

48. El día del estreno de una película se vendieron 600 entradas y se recaudaron 196.250 pesos Si los adultos pagaban 400 pesos y los niños 150 pesos ¿Cuál es el número de adultos y niños que acudieron?

49. En una librería han vendido 20 libros a dos precios distintos: unos a 800 pesos y otros a 1200 pesos con los que han obtenido 19.200 pesos ¿Cuántos libros han vendido de cada precio?

50. En una pastelería se fabrican dos clases de tartas. La primera necesita 2,4 Kg de masa y 3 horas de elaboración. La segunda necesita 4 Kg de masa y 2 horas de elaboración. Calcula el número de tartas elaboradas de cada tipo si se han dedicado 67 horas de trabajo y 80 Kg de masa.

51. Un pastelero compra dulces a 65 pesos la unidad y bombones a 25 pesos cada uno por un total de 585 pesos Como se le estropean 2 pasteles y 5 bombones calcula que si vende cada bombón a 3 pesos más y cada pastel a 5 pesos más de lo que le costaron perdería en total 221 pesos ¿Cuántos pasteles y bombones compró?

52. Halla dos números tales que si se dividen el primero por 3 y el segundo por 4 la suma es 15; mientras que si se multiplica el primero por 2 y el segundo por 5 la suma es 174.

53. Un número consta de dos cifras cuya suma es 9. Si se invierte el orden de las cifras el resultado es igual al número dado más 9 unidades. Halla dicho número.

54. Determina dos números tales que la diferencia de sus cuadrados es 120 y su suma es 6.

55. Halla una fracción equivalente a 3/5 cuyos términos elevados al cuadrado sumen 544.

56. Calcula dos números positivos tales que la suma de sus cuadrados sea 193 y la diferencia sea 95.

57. Un número está formado por dos cifras cuya suma es 15. Si se toma la cuarta parte del número y se le agregan 45 resulta el número con las cifras invertidas. ¿Cuál es el número?

58. Calcula dos números que sumen 150 y cuya diferencia sea cuádruplo del menor.

59. Calcula el valor de dos números sabiendo que suman 51 y que si al primero lo divides entre 3 y al segundo entre 6, los cocientes se diferencian en 1.

60. Tengo 30 monedas. Unas son de cinco pesos y otras de un peso ¿Puedo tener en total 78 pesos?

61. Juan y Roberto comentan: Juan: "Si yo te tomo 2 monedas, tendré tantas como tú" Roberto: "Sí, pero si yo te tomo 4, entonces tendré 4 veces más que tú". ¿Cuántas monedas tienen cada uno?

62. En una bolsa hay 16 monedas con un valor de 220 pesos Las monedas son de 5 y 25 pesos ¿Cuántas monedas hay de cada valor?

63. Tenía muchas monedas de 1 peso y las he cambiado por centavos. Ahora tengo la misma cantidad pero 60 monedas menos. ¿Cuánto dinero tengo?

64. En la fiesta de un amigo se han repartido entre los 20 asistentes el mismo número de monedas. Como a última hora ha acudido un chico más nos han dado a todos 1 moneda menos y han sobrado 17. ¿Cuántas monedas para repartía se tenía?

65. El otro día mi abuelo de 70 años de edad quiso repartir entre sus nietos cierta cantidad de dinero. Si nos daba 300 pesos a cada uno le sobraba 600 pesos y si no daba 500 pesos le faltaba 1000. ¿Cuántos nietos tiene? ¿Qué cantidad quería repartir?

66. Al preguntar en mi familia cuántos hijos son, yo respondo que tengo tantas hermanas como hermanos y mi hermana mayor responde que tiene doble número de hermanos que de hermanas. ¿Cuántos hijos e hijas somos?

67. Hace 5 años la edad de mi padre era el triple de la de mi hermano y dentro de 5 años sólo será el doble. ¿Cuáles son las edades de mi padre y de mi hermano?

68. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tienen cada uno?

69. Mi padrino tiene 80 años y me contó el otro día que entre nietas y nietos suman 8 y que si les diese 1.000 pesos a cada nieta y 500 a cada nieto se gastaría 6.600 pesos ¿Cuántos nietos y nietas tiene mi padrino?

70. Sabemos que mi tío tiene 27 años más que su hijo y que dentro de 12 años le doblará la edad. ¿Cuántos años tiene cada uno?

71. La edad de mi tía, hoy es el cuadrado de la de su hija; pero dentro de nueve años será solamente el triple. ¿Qué edad tiene cada una?

72. Mi tío le dijo a su hija. "Hoy tu edad es 1/5 de la mía y hace 7 años no era más que 1/7". ¿Qué edad tienen mi tío y su hija?

73. Un obrero ha trabajado durante 30 días para dos patrones ganando 207.000 pesos El primero le pagaba 6.500 pesos diarias y el segundo 8.000 pesos ¿Cuantos días trabajó para cada patrón?

74. Dos obreros trabajan 8 horas diarias en la misma empresa. El primero gana 500 pesos diarias menos que el segundo; pero ha trabajado durante 30 jornadas mientras que el primero sólo 24. Si el primero ha ganado 33.000 pesos más que el segundo calcula el salario diario de cada obrero.

75. Un rectángulo tiene un perímetro de 392 metros. Calcula sus dimensiones sabiendo que mide 52 metros más de largo que de ancho.

76. Un rectángulo mide 40 m2 de área y 26 metros de perímetro. Calcula sus dimensiones.

77. El perímetro de un rectángulo mide 36 metros. Si se aumenta en 2 metros su base y se disminuye en 3 metros su altura el área no cambia. Calcula las dimensiones del rectángulo.

78. Calcula las dimensiones de un rectángulo tal que si se aumenta la base en 5 metros y se disminuye la altura en otros 5 la superficie no varía; pero si se aumenta la base en 5 y disminuye la altura en 4, la superficie aumenta en 4 metros cuadrados.

79. El área de un triángulo rectángulo es 120 cm2 y la hipotenusa mide 26 cm. ¿Cuáles son las longitudes de los catetos?

80. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 18º mayor que el otro. ¿Cuánto mide cada ángulo del triángulo?

81. La altura de un trapecio isósceles mide 4 cm, la suma de las bases es de 14 cm, y los lados oblicuos miden 5 cm. Averigua las bases del trapecio.

82. El perímetro de un triángulo rectángulo mide 30 m y el área 30 m2. Calcula los catetos.

83. La diferencia de las diagonales de un rombo es de 2 m. Si a las dos las aumentamos en 2 m el área aumenta en 16 m2. Calcula las longitudes de las diagonales, el perímetro y el área de dicho rombo.

84. Los lados paralelos de un trapecio miden 15 cm y 36 cm, respectivamente, y los no paralelos 13 y 20 cm. Calcula la altura del trapecio.

85. En un pueblo, hace muchos años, se utilizaba, como unidades de medida de peso, la libra y la onza. Recientemente se encontró un documento del siglo pasado en el que aparecían los siguientes pasajes: "... pesando 3 libras y 4 onzas, es decir 1495 gramos..." y "... resultando 2 libras y 8 onzas, cuando el extranjero preguntó por el peso en gramos le contestaron 1150 gramos". ¿Sabrías calcular el valor, en gramos, de la libra y la onza?

86. En el mismo documento antes mencionado nos encontramos el siguiente pasaje: "... las dimensiones del mural eran 5 toesas y 3 pies de largo y 3 toesas y 5 pies de alto..." Como ese mural se conserva en la actualidad se ha medido con la máxima precisión posible: 4'82 m de largo por 2'988 m de alto. Con estos datos ¿puedes decir cuánto mide una toesa y un pie en metros?

87. A las tres de la tarde sale de la ciudad un coche con una velocidad de 80 Km/h. Dos horas más tarde sale una moto en su persecución a una velocidad de 120 Km/h. ¿A qué hora lo alcanzará? ¿A qué distancia de la ciudad?

88. Dos pueblos, A y B, distan 155 Km. A la misma hora salen de cada pueblo un ciclista. El de A viaja a una velocidad de 25 Km/h y el de B a 33 Km/h. ¿A qué distancia de cada pueblo se encuentran? ¿Cuánto tiempo ha transcurrido?

89. Un crucero tiene habitaciones dobles (2 camas) y sencillas (1 cama). En total tiene 47 habitaciones y 79 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

90. Dos llaves han llenado un depósito de 31 m3 abierto la uno 7 horas y la otra 2 horas. Después llenan otro depósito 27 m3 abierto la uno 4 horas y la otra 3 horas. ¿Cuántos litros vierte por hora cada llave?

91. Un depósito se llena por una llave en 5 horas y por otra en 2 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse abriendo las dos llaves a la vez?

92. Dos llaves alimentan simultáneamente un depósito tardando 2'4 horas en llenarlo. Si se abriera cada llave por separado la primera tardaría 2 horas menos que la segunda. ¿Cuánto tiempo tardaría cada una de ellas en llenarlo de manera independiente?

93. Un reloj señala las tres en punto. A partir de esa hora, ¿a qué hora coincidirán las manecillas por primera vez?

94. Un reloj señala las tres en punto. Por tanto las manecillas del reloj forman un ángulo recto. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que formen de nuevo un ángulo recto?

95. Un reloj marca las doce horas. ¿A qué hora la manecilla que marca los minutos se encontrará otra vez con la manecilla que marca la hora?

96. Un moderno buque de turismo tiene camarotes dobles (dos camas) y simples (1 cama). Si se ofertan 65 camarotes que en total tienen 105 camas, averiguar el número de camarotes de cada tipo. (Resp.: 25 camarotes simples y 40 camarotes dobles).

97. Cierta vez poseía muchas monedas de 25 centavos y decidí cambiarlas por monedas de un peso. Si el número de monedas disminuyó en 90, ¿cuánto dinero logré ahorrar? (Resp.: 30 pesos)

98. Hallar las edades de dos personas sabiendo que la suma de las mismas es, actualmente, 50 años y que la razón entre las mismas era, hace 5 años, igual a 1/3. (Resp.: 15 años y 35 años)

99. Cuántos objetos tiene Aníbal y cuántos Bernardo sabiendo que si Bernardo le da a Aníbal 5 objetos, éste tiene el triple de los que le quedan a Bernardo y que ambos quedan con el mismo número de objetos si Aníbal le da a Bernardo 6 objetos. (Resp.: Aníbal tenía 28 objetos y Bernardo 16 objetos)

100. Descomponer el número 149 en dos partes tales que el cociente entero entre dichas partes sea 4 y el resto 4. (Resp.: 120 y 29)

101. Hallar la base y la altura de un rectángulo sabiendo que si se aumenta 3 cm a la altura y se disminuye 2 cm a la base, su área no aumenta ni disminuye, siendo además la altura 2 cm mayor que la base.(Resp.: base = 10 cm; altura = 12 cm)

102. Si el largo de un rectángulo fuese 9 cm más corto y el ancho fuese 6 cm más largo, la figura sería un cuadrado con la misma área que el rectángulo. ¿Cuál sería el área del cuadrado? (Resp.: 324 cm2)

103. Un total de $5000 fue depositado en dos cuentas de interés simple. Una de las cuentas paga el 8 % de interés simple anual, mientras que la segunda cuenta paga el 12%. ¿Cuánto deberá ser depositado en cada cuenta para ganar un interés total anual de 520?

104. Un depósito fue hecho en una cuenta de ahorro que paga el 6% de interés simple anual. En otra cuenta fueron depositados $3500 menos que en la primera cuenta, que paga el 10% de interés simple anual en una cuenta "money market". Si el total de interés ganado en ambas cuentas al cabo de un año fue $450, ¿cuánto dinero fue depositado en la cuenta que paga el 6%?

105. Un carnicero mezcla carne de res molida que cuesta a $2.50 la libra con carne molida que cuesta $3.10 la libra. ¿Cuántas libras debe mezclar de cada carne para hacer una mezcla de 80 libras que se venda a $2.65 la libra?

106. Un químico tiene una solución de peróxido al 8% y otra al 5 %. ¿Cuántos milímetros de cada uno deberá hacer mezclar para hacer 300 milímetros de una solución que tenga 6% de peróxido?

107. Un platero mezcla 50 gramos de un metal que tiene 50% de plata con 150 gramos de otro metal que contiene plata. Si el metal resultante tiene 68% de plata, hallar el por ciento de plata que tiene el de 150 gramos.

108. Un corredor de larga distancia comienza una carrera a una velocidad promedio de 6 mph. Una hora más tarde un segundo corredor comienza la carrera a una velocidad promedio de 8 mph. ¿Cuánto tiempo se tardará el segundo corredor en alcanzar el primero?

109. Un ejecutivo se va guiando desde su casa al aeropuerto a una velocidad promedio de 30 mph., donde le espera un helicóptero. El ejecutivo borda el helicóptero rumbo a las oficinas corporativas y viaja a una velocidad promedio de 60 mph. Si la distancia tota era de 150 millas y el viaje en total (comenzando en su casa) toma 3 horas, ¿cuánto es la distancia desde el aeropuerto hasta las oficinas corporativas?

110. El perímetro de un rectángulo es 120 pies. El largo del rectángulo es el doble del ancho. Hallar el largo y ancho del rectángulo

Nombre del alumno:	
Grupo:	
Unidad de aprendizaje II:	Modelado matemático de problemas.
Resultado de aprendizaje: 2.2	Representa y resuelve situaciones de su entorno, mediante la aplicación y desarrollo de productos notables, factorización y racionalización de expresiones algebraicas.
Ejercicio núm. 25:	Resuelve ejercicios teóricos y prácticos relativos a situaciones cotidianas y del entorno personal, familiar y social del alumno, aplicando productos notables, factorización y racionalización de expresiones algebraicas.

Productos notables

Resolver

$(7a^2b^3+5x^4)^2=$

$(a^3-b^2)(a^3+b^2)=$

$(1-8xy)\cdot(1+8xy)=$

$(a^2-2b)^3=$

$(x^3+6)(x^3-8)=$

$(a^{x+1}-2b^{x-1})(2b^{x-1}+a^{x+1})=$

$(2+y)(4-2y+y^2)=$

$(x^{a+1}-8)(x^{a+1}+9)=$

$(a^2b^2-1)(a^2b^2+7)=$

$\left(\frac{2}{3}a^2b-\frac{1}{5}x^3y^4\right)^2=$

$(2mn^2+3m^{-1}n^{-3})^2=$

$(2a-3b+c)^2=$

$(x^3y^3-6)(x^3y^3+6)=$

$(5a^{x+1}-7)(5a^{x+1}-4)=$

$\left(\frac{2}{3}a^6b^4c^{-3}+11ab^2\right)=$

$(5x^2-3)^3=$

$(x-1)(x^2+x+1)=$

$(a^{2n}b^m-2x^3y^a)(a^{2n}b^m+2x^3y^a)=$

$\left(3\sqrt{7}a^{x+1}b^m-\frac{1}{5}b^{-7}c^{-2}\right)\left(3\sqrt{7}a^{x+1}b^m+\frac{1}{5}b^{-7}c^{-2}\right)=$

$(5-ab)(25+5ab+a^2b^2)=$

$(m^2-m+n)(n+m+m^2)=$

$(3a^{x+y}-2)(3a^{x+y}-5)=$

$(x^2y^{-3}z^{-6}-5a^3b^7c)(x^2y^{-3}z^{-6}+5a^3b^7c)=$

Expresa como un producto de tantos factores como sea posible:

a) $3b - 6x =$
b) $5x - 5 =$
c) $20u^2 - 55u =$
d) $16x - 12 =$
e) $6x - 12y + 18=$
f) $15x + 20y - 30=$
g) $14c - 21d - 30=$
h) $152x^2yz - 114xyz^2=$
i) $30m^2n^2 + 75mn^2 - 105mn^3 =$
j) $28pq^3x + 20p^2qx^2 - 44p^3qx + 4pqx=$
k) $14mp + 14mq - 9np - 9nq =$
l) $21ax + 35ay + 20y + 12x =$
m) $175ax + 75ay - 25bx - 15by=$
n) $20abc - 30abd - 60b^2c + 90b^2d =$
ñ) $10abx^2 + 4ab^2x^2 - 40aby^2 - 16ab^2y^2 =$
o) $4g^2 + 2gh =$
p) $25a - 30ab + 15ab^2 =$
q) $m^2 - 64 =$
r) $144y^2 - 256 =$
s) $144 - 9x^2=$
v) $25x^6 - 4y^4 =$
w) $ap + aq + bm + bn=$
x) $xy - x + 3z - 6 =$
y) $x^2 + xy + xz + yz=$
z) $15 + 5x + 3b + xb =$
z') $ab + a - b - 1 =$

Expresar como un producto:

a) $x^2 + 6x + 8=$
b) $x^2 - 16x + 63=$
c) $x^2 + 10x - 56=$
d) $x^2 - 13x - 48 =$
e) $y^2 - 7y - 30=$
f) $x^2 - 14x + 48=$
g) $x^2 - 5x - 84=$
h) $x^2 + 27x + 180=$
i) $x^2 + 7x - 120=$
j) $x^2 - 30x + 216=$

Completar el desarrollo del cuadrado de un binomio:

a) $x^2 + 10x +$ ....
b) $y^2 - 18y +$ ....
c) $m^2 -$ .... $+ 36n^2$
d) $p^2 +$ .... $+ 64p^2$
e) .... $+ 42x + 49$
f) .... $- 390y + 225$
g) $289z^2 + 340z +$ ....
h) $64x^2 - 80xy +$ ....

Expresar como un cuadrado de binomio:

a) $g^2 + 2gh + h^2 =$
b) $225 - 30b + b^2 =$
c) $x^2 + 2xy + y^2 =$
d) $p^2 - 2pq + q^2 =$
e) $a^2 - 2a + 1 =$
f) $m^2 - 6m + 9=$
g) $9x^2 - 12xy + 4y^2 =$
h) $36n^2 + 84pn + 49p^2 =$

Simplificar las siguientes expresiones, aplicando los criterios de factorización que corresponda:

a) $\dfrac{48a}{72ab}=$ b) $\dfrac{25a^2b}{75ab^2}=$ c) $\dfrac{96m^3n^2}{32m^4n^3}=$ d) $\dfrac{3(a+b)}{5(a+b)}=$

e) $\dfrac{4a+4b}{5a+5b}=$ f) $\dfrac{3x-6y}{5x-10y}=$ g) $\dfrac{x^2+xy}{xy+y^2}=$ h) $\dfrac{8x+7y}{64x^2-49y^2}=$

i) $\dfrac{24x-18y}{44x-33y}=$ j) $\dfrac{x^2-16}{x^2+8x+16}=$ k) $\dfrac{9x^2+30x+25}{6x+10}=$ l) $\dfrac{x^2-25}{x^2+x-20}=$

m) $\dfrac{4y^2-4y+1}{6x-3}=$ n) $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+7x+12}=$ ñ) $\dfrac{x^2+4x-12}{x^2+8x+12}=$ o) $\dfrac{64-u^2}{u^2-13u+40}=$

p) $\dfrac{(a-b)^2-c^2}{a^2-(b-c)^2}=$ q) $\dfrac{1-64c^6}{1-4c^2}=$ r) $\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-25}=$ s) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+3x+2}=$

y) $\dfrac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=$ z) $\dfrac{1+\frac{1}{a\text{-}1}}{1-\frac{1}{a+1}}=$ z') $\dfrac{\frac{x+y}{x\text{-}y}-\frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x}-\frac{x+2y}{x+y}}=$

t) $\dfrac{a^2-9}{3(a+3)}=$ v) $\dfrac{m^2-n^2}{2n-2m}=$ w) $\dfrac{y^2+y-12}{y^2+2y-15}=$ x) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+8x+15}=$

Racionalización

Expresiones algebraicas que se racionalizan aplicando la siguiente propiedad:

Si $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$ entonces $\sqrt[n]{a^n}$

En cada una de las siguientes expresiones, racionalice el denominador y simplifique el resultado

a) $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$ b) $\dfrac{15}{\sqrt[3]{3^2}}$ c) $\dfrac{-3}{2\sqrt[5]{6^4}}$

d) $\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x-2}}$ e) $\dfrac{2x^2}{5\sqrt[3]{x^2}}$ f) $\dfrac{3x-1}{2\sqrt[5]{(3x-1)^2}}$

Soluciones:

a) $\dfrac{5}{\sqrt{10}} = \dfrac{5}{\sqrt{10}} \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \dfrac{5\sqrt{10}}{\sqrt{10^2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

f) $\dfrac{3x-1}{2\sqrt[5]{(3x-1)^2}} = \dfrac{3x-1}{2\sqrt[5]{(3x-1)^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{(3x-1)^3}}{\sqrt[5]{(3x-1)^3}} = \dfrac{(3x-1)\sqrt[5]{(3x-1)^3}}{2(3x-1)} = \dfrac{\sqrt[5]{(3x-1)^3}}{2}$

Expresiones algebraicas que se racionalizan aplicando la siguiente propiedad:

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Ejemplo

En cada una de las siguientes expresiones racionalice el denominador y simplifique el resultado.

a) $\dfrac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{7+4x}{2\sqrt{x+2}-1}$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{9y-4x^2}{2x+3\sqrt{y}}$

e) $\dfrac{5}{2+\sqrt{10}}$

f) $\dfrac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$

Solución:

a) $$\frac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{-1\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)} = \frac{-1\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{-1\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{2-3} = \frac{-1\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{-1} = \sqrt{2}-\sqrt{3}$$

f) $$\frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}} = \frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{3\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \frac{3\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2} = \frac{3\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{x-(x+1)}$$

$$= \frac{3\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{x-x-1} = \frac{3\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{-1}$$

$$= -3\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$$

Expresiones algebraicas que se racionalizan aplicando alguna de las siguientes propiedades:

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que:

i. $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$

ii. $(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3$

Ejemplo

En cada una de las siguientes expresiones racionalice el denominador y simplifique el resultado.

a) $\dfrac{14}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}}$ b) $\dfrac{-6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}$ c) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{7}-3}$

d) $\dfrac{8x+11}{2\sqrt[3]{x-2}+3}$ e) $\dfrac{x+3}{2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x-1}}$ f) $\dfrac{25-x^2}{2-\sqrt[3]{x+3}}$

Soluciones:

a) $$\frac{14}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}} = \frac{14}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2} = \frac{14\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+\left(\sqrt[3]{5}\right)^3}$$

$$= \frac{14\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{10}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]}{2+5} = \frac{14\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{10}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]}{7}$$

$$= 2\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{10}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]$$

Por lo que:

$$\frac{14}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}}=2\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{10}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]$$

b) $$\frac{-6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}} = \frac{-6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{7}\right)^2+\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{5}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{7}\right)^2+\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{5}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2} = \frac{-6\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2+\sqrt[3]{7}\,\sqrt[3]{5}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{7}\right)^3-\left(\sqrt[3]{5}\right)^3}$$

$$= \frac{-6\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2+\sqrt[3]{35}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]}{7-5} = \frac{-6\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2+\sqrt[3]{35}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]}{7-5}$$

$$= -3\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2+\sqrt[3]{35}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]$$

Por lo que:

$$\frac{-6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}=-3\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2+\sqrt[3]{35}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]$$

c) $$\frac{10}{\sqrt[3]{7}-3} = \frac{10}{\sqrt[3]{7}-3}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{7}\right)^2+\sqrt[3]{7}\cdot 3+3^2}{\left(\sqrt[3]{7}\right)^2+\sqrt[3]{7}\cdot 3+3^2} = \frac{10\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2+3\sqrt[3]{7}+3^2\right]}{\left(\sqrt[3]{7}\right)^3-3^3}$$

$$= \frac{10\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2+3\sqrt[3]{7}+9\right]}{7-27} = \frac{10\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2+3\sqrt[3]{7}+9\right]}{7-27}$$

$$= \frac{-\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2+3\sqrt[3]{7}+9\right]}{2}$$

Por lo que:

$$\frac{10}{\sqrt[3]{7}-3}=\frac{-\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2+3\sqrt[3]{7}+9\right]}{2}$$

$$\text{d)}\ \frac{8x+11}{2\sqrt[3]{x-2}+3} = \frac{8x+11}{2\sqrt[3]{x-2}+3}\cdot\frac{\left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^2-2\sqrt[3]{x-2}\cdot 3+(3)^2}{\left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^2-2\sqrt[3]{x-2}\cdot 3+(3)^2}$$

$$= \frac{(8x+11)\left[\left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^2-6\sqrt[3]{x-2}+(3)^2\right]}{\left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^3+(3)^3}$$

$$= \frac{(8x+11)\left[\left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^2-6\sqrt[3]{x-2}+9\right]}{8(x-2)+27}$$

$$= \frac{(8x+11)\left[\left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^2-6\sqrt[3]{x-2}+9\right]}{8x-16+27}$$

$$= \frac{(8x+11)\left[\left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^2-6\sqrt[3]{x-2}+9\right]}{8x+11}$$

$$= \left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^2-6\sqrt[3]{x-2}+9$$

Por lo que:

$$\frac{8x+11}{2\sqrt[3]{x-2}+3}=\left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^2-6\sqrt[3]{x-2}+9$$

e) $\dfrac{x+3}{2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x-1}}$

$$=\frac{x+3}{2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x-1}}\cdot\frac{\left(2\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}\cdot 3\sqrt[3]{x-1}+\left(3\sqrt[3]{x-1}\right)^2}{\left(2\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}\cdot 3\sqrt[3]{x-1}+\left(3\sqrt[3]{x-1}\right)^2}$$

$$=\frac{(x+3)\left[\left(2\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}\cdot 3\sqrt[3]{x-1}+\left(3\sqrt[3]{x-1}\right)^2\right]}{\left(2\sqrt[3]{x}\right)^3-\left(3\sqrt[3]{x-1}\right)^3}$$

$$=\frac{(x+3)\left[\left(2\sqrt[3]{x}\right)^2+6\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x-1}+\left(3\sqrt[3]{x-1}\right)^2\right]}{8x-27(x-1)}$$

$$=\frac{(x+3)\left[\left(2\sqrt[3]{x}\right)^2+6\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x-1}+\left(3\sqrt[3]{x-1}\right)^2\right]}{8x-27(x-1)}$$

$$=\frac{(x+3)\left[\left(2\sqrt[3]{x}\right)^2+6\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x-1}+\left(3\sqrt[3]{x-1}\right)^2\right]}{8x-27(x-1)}$$

$$= \frac{(x+3)\left[\left(2\sqrt[3]{x}\right)^2 + 6\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x-1} + \left(3\sqrt[3]{x-1}\right)^2\right]}{-19x+27}$$

Por lo que:

$$\frac{x+3}{2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x-1}} = \frac{(x+3)\left[\left(2\sqrt[3]{x}\right)^2 + 6\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x-1} + \left(3\sqrt[3]{x-1}\right)^2\right]}{-19x+27}$$

f) $$\frac{25-x^2}{2-\sqrt[3]{x+3}} = \frac{25-x^2}{2-\sqrt[3]{x+3}}\cdot\frac{(2)^2+2\sqrt[3]{x+3}+\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2}{(2)^2+2\sqrt[3]{x+3}+\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(25-x^2\right)\left[(2)^2+2\sqrt[3]{x+3}+\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2\right]}{(2)^3-\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^3}$$

$$= \frac{\left(25-x^2\right)\left[2^2+2\sqrt[3]{x+3}+\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2\right]}{8-(x+3)}$$

$$= \frac{\left(25-x^2\right)\left[(2)^2+2\sqrt[3]{x+3}+\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2\right]}{(2)^3-\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^3}$$

$$= \frac{\left(25-x^2\right)\left[4+2\sqrt[3]{x+3}+\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2\right]}{5-x}$$

$$= \frac{(5-x)(5+x)\left[4+2\sqrt[3]{x+3}+\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2\right]}{5-x}$$

$$= (5+x)\left[4+2\sqrt[3]{x+3}+\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2\right]$$

Por lo que:

$$\frac{25-x^2}{2-\sqrt[3]{x+3}} = (5+x)\left[4+2\sqrt[3]{x+3}+\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2\right]$$

Nota: Para racionalizar este tipo de expresiones debe tenerse claro la propiedad que se debe aplicar en cada caso, obsérvese por ejemplo que la propiedad (i) se uso en los ejemplos (b), (c), (e) y (f), y que la propiedad (ii) se usó en los ejemplos (a) y (d).

A continuación racionalizaremos algunas expresiones en las cuales se combinan los métodos estudiados anteriormente.

Ejemplo

En cada una de las siguientes expresiones racionalice el denominador y simplifique el resultado.

a) $\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}$

b) $\dfrac{-2}{\sqrt[3]{2-3\sqrt[3]{y}}}$

c) $\dfrac{x^4-x^2y^2}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}$

d) $\dfrac{x+2}{2+\sqrt{\sqrt{x}-1}}$

Soluciones:

a) $$\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}} = \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}\cdot\frac{\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}}{\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}}$$

$$= \frac{(x^2-1)\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}}{\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^3}}$$

$$= \frac{(x^2-1)\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}}{1-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(x^2-1)\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}}{1-\sqrt{x}} \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(x^2-1)\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}\,(1+\sqrt{x})}{(1)^2-(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{(x^2-1)\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}\,(1+\sqrt{x})}{1-x}$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}\,(1+\sqrt{x})}{-(x-1)}$$

$$= -(x+1)\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}\,(1+\sqrt{x})$$

Por lo que:

$$\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}} = -(x+1)\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}\,(1+\sqrt{x})$$

b) $$\frac{-2}{\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}} = \frac{-2}{\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}}\cdot\frac{\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}}{\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}}{\sqrt{(2-3\sqrt[3]{y})^2}}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}}{2-3\sqrt[3]{y}}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}}{2-3\sqrt[3]{y}}\cdot\frac{(2)^2+2\cdot 3\sqrt[3]{y}+(3\sqrt[3]{y})^2}{(2)^2+2\cdot 3\sqrt[3]{y}+(3\sqrt[3]{y})^2}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}\left[4+6\sqrt[3]{y}+(3\sqrt[3]{y})^2\right]}{(2)^3-(3\sqrt[3]{y})^3}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}\left[4+6\sqrt[3]{y}+\left(3\sqrt[3]{y}\right)^2\right]}{8-27y}$$

Por lo que:

$$\frac{-2}{\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}} = \frac{-2\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}\left[4+6\sqrt[3]{y}+\left(3\sqrt[3]{y}\right)^2\right]}{8-27y}$$

c) $$\frac{x^4-x^2y^2}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} = \frac{x^4-x^2y^2}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{\left(x^4-x^2y^2\right)\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}$$

$$= \frac{\left(x^4-x^2y^2\right)\sqrt[3]{x^2}}{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}$$

$$= \frac{\left(x^4-x^2y^2\right)\sqrt[3]{x^2}}{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$= \frac{\left(x^4-x^2y^2\right)\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{\left(x^4 - x^2y^2\right)\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x\left(x-y\right)}$$

$$= \frac{x^2\left(x^2 - y^2\right)\left(x+y\right)\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x\left(x-y\right)}$$

$$= \frac{x^2\left(x - y\right)\left(x+y\right)\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x\left(x-y\right)}$$

$$= x\left(x+y\right)\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$$

Por lo que:

$$\frac{x^4 - x^2y^2}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} = x\left(x+y\right)\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$$

d) $$\frac{x+2}{2+\sqrt{\sqrt{x}-1}} = \frac{x+2}{2+\sqrt{\sqrt{x}-1}}\cdot\frac{2-\sqrt{\sqrt{x}-1}}{2-\sqrt{\sqrt{x}-1}}$$

$$= \frac{\left(x+2\right)\left(2-\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)}{\left(2\right)^2-\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)^2}$$

$$= \frac{(x+2)\left(2-\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)}{4-\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$= \frac{(x+2)\left(2-\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)}{4-\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{(x+2)\left(2-\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)}{5-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(x+2)\left(2-\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)}{5-\sqrt{x}} \cdot \frac{5+\sqrt{x}}{5+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(x+2)\left(2-\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)\left(5+\sqrt{x}\right)}{(5)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{(x+2)\left(2-\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)(5+\sqrt{x})}{25-x^2}$$

Por lo que:

$$\frac{x+2}{2+\sqrt{\sqrt{x}-1}} = \frac{(x+2)\left(2-\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)(5+\sqrt{x})}{25-x^2}$$

Unidad de aprendizaje III:	Manejo de operaciones con funciones algebraicas.
Resultado de aprendizaje: 3.1	Representa situaciones del entorno, empleando los conceptos de relación y función.
Ejercicio núm. 26:	Representación simbólica y resolución de funciones.

1. Dada $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$, encuentre

$$f(-2);\ f(0);\ f(1);\ f(11/9);\ f(2x^2 - 1);\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h},\ h \neq 0$$

2. $f(x) = x - 5;\ g(x) = x^2 - 1$

En los ejercicio 1 y 2, se definen las funciones *f* y *g*. En cada ejercicio defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función resultante:
(a) *f* + *g*; (b) *f* - *g*; (c) *f* * *g*; (d) *f* / *g*; (e) *g* / *f*

3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1};\ g(x) = \dfrac{1}{x}$
4. $f(x) = x - 2;\ g(x) = x + 7$
5. $f(x) = x - 5;\ g(x) = x^2 - 1$
6. $f(x) = \sqrt{x-2};\ g(x) = x^2 - 2$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x};\ g(x) = \sqrt{x}$

En los ejercicios 4 a 7, se definen las funciones *f* y *g*. En cada ejercicio defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función compuesta:
(a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$, (d) $g \circ g$

8. Se tiene $f(x) = 2x - 3$; defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función resultante:

(a) $f(x^2)$, (b) $[f(x)]^2$, (c) $(f \circ f)(x)$

9. Determine si la función que se da es par, impar, o ninguna de las dos:

(a) $g(x) = 5x^2 - 4$ (b) $f(x) = x^3 + 1$ (c) $f(t) = 4t^5 + 3t^3 - 2t$

(d) $g(r) = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$ (e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (f) $h(x) = \dfrac{4x^2 - 5}{2x^3 + x}$

(g) $f(z) = (z - 1)^2$ (h) $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$ (i) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(j) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

10. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ y $g(x) = \dfrac{1-x}{x}$

Muestre que f y g son funciones inversas.

11. Si $f(x) = x^2 + 2x + 2$,

encuentre dos funciones g para las cuales

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$$

12. Dada $g(z) = 4^z$ demostrar que $g(z+1) - g(z) = 3g(z)$

S o l u c i o n e s

1. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$

Solución:

Para hallar el valor correspondiente de la función f para cada valor particular dado a la variable independiente x, se sustituye la x, en la fórmula dada, por el valor numérico asignado; y se efectúan las operaciones indicadas:

$$f(-2) = \sqrt{2(-2)^2 + 1} = \sqrt{2(4) + 1} = \sqrt{8 + 1} = \sqrt{9};$$

$$\therefore \quad f(-2) = 3$$

$$f(0) = \sqrt{2(0)^2 + 1} = \sqrt{2(0) + 1} = \sqrt{0 + 1} = \sqrt{1};$$

$$\therefore \quad f(0) = 1$$

$$f(1) = \sqrt{2(1)^2 + 1} = \sqrt{2(1) + 1} = \sqrt{2 + 1};$$

$$\therefore \quad f(1) = \sqrt{3}$$

$$f(11/9) = \sqrt{2(11/9)^2 + 1} = \sqrt{2(121/81) + 1} = \sqrt{242/81 + 1} = \sqrt{323/81};$$

$$\therefore \quad f(11/9) = \frac{\sqrt{323}}{9}$$

$$f(2x^2 - 1) = \sqrt{2(2x^2 - 1)^2 + 1} = \sqrt{2(4x^4 - 4x^2 + 1) + 1} = \sqrt{8x^4 - 8x^2 + 2 + 1};$$

$$\therefore \quad f(2x^2 - 1) = \sqrt{8x^4 - 8x^2 + 2 + 1}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{2(x+h)^2 + 1} - \sqrt{2x^2 + 1}}{h} = \frac{\sqrt{2(x^2 + 2hx + h^2) + 1} - \sqrt{2x^2 + 1}}{h};$$

$$\therefore \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{2x^2 + 4hx + 2h^2 + 1} - \sqrt{2x^2 + 1}}{h}.$$

2. $f(x) = x - 5;\ g(x) = x^2 - 1$

Solución:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x-5) + (x^2-1) = x - 5 + x^2 - 1;$$

$$\therefore \quad (f+g)(x) = x^2 + x - 6;\ \ dom(f+g) = \mathbb{R}.$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x-5) - (x^2-1) = x - 5 - x^2 + 1;$$

$$\therefore \quad (f-g)(x) = -x^2 + x - 4;\ \ dom(f-g) = \mathbb{R}.$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x-5)(x^2-1) = x^3 - x - 5x^2 + 5;$$

$$\therefore \quad (f \cdot g)(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5;\ \ dom(f \cdot g) = \mathbb{R}.$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = (x-5)/(x^2-1);$$

$$\therefore \quad (f/g)(x) = \frac{x-5}{x^2-1};\ \ dom(f/g) = \mathbb{R} - \{-1,\ 1\}.$$

$$(g/f)(x) = g(x)/f(x) = (x^2-1)/(x-5);$$

$$\therefore \quad (f/g)(x) = \frac{x^2-1}{x-5};\ \ dom(g/f) = \mathbb{R} - \{5\}.$$

3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Solución:

$$dom f = (-\infty,1) \cup (1,\infty), \quad dom g = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$$

$$\left[(-\infty,1) \cup (1,\infty)\right] \cap \left[(-\infty,0) \cup (0,\infty)\right] = (-\infty,0) \cup (0,1) \cup (1,\infty) \Leftrightarrow \mathbb{R} - \{0,1\}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x} = \frac{x^2+x+x-1}{x^2-x};$$

$$\therefore \quad (f+g)(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^2-x}; \quad dom(f+g) = \mathbb{R} - \{0,1\} \Leftrightarrow \{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}.$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x^2+x-x+1}{x^2-x};$$

$$\therefore \quad (f-g)(x) = \frac{x^2+1}{x^2-x}; \quad dom(f-g) = \mathbb{R} - \{0,1\} \Leftrightarrow \{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}.$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left[\frac{x+1}{x-1}\right]\left[\frac{1}{x}\right];$$

$$\therefore \quad (f \cdot g)(x) = \frac{x+1}{x^2-x}; \quad dom(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{0,1\} \Leftrightarrow \{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}.$$

$$(f / g)(x) = f(x) / g(x) = \frac{x+1}{x-1} \div \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x-1} \times \frac{x}{1};$$

$$\therefore \quad (f / g)(x) = \frac{x^2+x}{x-1}; \quad dom(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{0,1\} \Leftrightarrow \{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}.$$

$$(g / f)(x) = g(x) / f(x) = \frac{1}{x} \div \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x} \times \frac{x-1}{x+1};$$

$$\therefore \quad (g / f)(x) = \frac{x-1}{x^2+1}; \quad dom(g / f) = \mathbb{R} - \{0,1\} \Leftrightarrow \{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}.$$

4. $f(x) = x - 2;\ g(x) = x + 7$

Solución:

(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x+7) - 2 = x + 7 - 2;$

$\therefore \quad (f \circ g)(x) = x + 5;\ dom(f \circ g) = \mathbb{R}.$

(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x-2) + 7 = x - 2 + 7;$

$\therefore \quad (g \circ f)(x) = x + 5;\ dom(g \circ f) = \mathbb{R}.$

(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x-2) - 2 = x - 2 - 2;$

$\therefore \quad (f \circ f)(x) = x - 4;\ dom(f \circ f) = \mathbb{R}.$

(d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x+7) + 7 = x + 7 + 7;$

$\therefore \quad (g \circ g)(x) = x + 14;\ dom(g \circ g) = \mathbb{R}.$

5. $f(x) = x - 5;\ g(x) = x^2 - 1$

Solución:

(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x^2 - 1) - 5 = x^2 - 1 - 5;$

$\therefore \quad (f \circ g)(x) = x^2 - 6;\ dom(f \circ g) = \mathbb{R} \Leftrightarrow (-\infty, \infty).$

(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x-5)^2 - 1 = x^2 - 10x + 25 - 1;$

$\therefore \quad (g \circ f)(x) = x^2 - 10x + 24;\ dom(g \circ f) = \mathbb{R}.$

(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x-5) - 5 = x - 5 - 5;$

$\therefore \quad (f \circ f)(x) = x - 10;\ dom(f \circ f) = \mathbb{R}.$

(d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - 1;$

$\therefore \quad (g \circ g)(x) = x^4 - 2x^2;\ dom(g \circ g) = \mathbb{R}.$

6. $f(x) = \sqrt{x-2};\ g(x) = x^2 - 2$

Solución:

Para hallar los dominios de las funciones compuestas, téngase en cuenta que "el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos x que pertencen al $dom g$, tales que $g(x)$ está en el $dom f$ ".

(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{(x^2-2)-2} = \sqrt{x^2-4}.$

$dom g = (-\infty, \infty),\ dom f = [2, \infty):\ x^2 - 2 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2\ \text{ó}\ x \geq 2,$

$\Rightarrow\quad dom(f \circ g) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

$\therefore\quad (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2-4};\ dom(f \circ g) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty).$

(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x-2}^{\,2} - 2 = x - 2 - 2 = x - 4$

$dom f = [2, \infty),\ dom g = (-\infty, \infty):\ \sqrt{x-2} \in (-\infty, \infty) \Leftrightarrow x > 2,$

$\Rightarrow\quad dom(g \circ f) = [2, \infty);$

$\therefore\quad (g \circ f)(x) = x - 4;\ dom(g \circ f) = [2, \infty).$

(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x-2}-2}$

$dom f = [2, \infty),\ dom f = [2, \infty):\ \sqrt{x-2} \geq 2 \Leftrightarrow x - 2 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 6,$

$\Rightarrow\quad dom(f \circ f) = [6, \infty);$

$\therefore\quad (f \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x-2}-2};\ dom(f \circ f) = [6, \infty).$

(d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x^2-2)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 4 - 2;$

$\therefore\quad (g \circ g)(x) = x^4 - 4x^2 + 2;\ dom(g \circ g) = \mathbb{R}.$

7. $f(x) = \dfrac{1}{x};\ g(x) = \sqrt{x}$

Solución:

Para hallar los dominios de las funciones compuestas, téngase en cuenta que "el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos x que pertencen al $domg$, tales que $g(x)$ está en el $domf$ ".

(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$domg = [0, \infty)$, $domf = \mathbb{R} - \{0\}$: $\sqrt{x} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \geq 0$,

$\Rightarrow$ $dom(f \circ g) = (0, \infty)$

$\therefore$ $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; $dom(f \circ g) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

$domf = (-\infty, 0) \cap (0, \infty)$, $domg = [0, \infty)$: $\dfrac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$,

$\Rightarrow$ $dom(g \circ f) = (0, \infty)$;

$\therefore$ $(g \circ f)(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$; $dom(g \circ f) = (0, \infty)$.

(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}} = x$

$\therefore$ $(f \circ f)(x) = x$; $dom(f \circ f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

(d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$;

$\therefore$ $(g \circ g)(x) = \sqrt[4]{x}$; $dom(g \circ g) = [0, \infty)$.

8. $f(x) = 2x - 3$

Solución:

(a) $f(x^2) = 2x^2 - 3$; $domf(x^2) = \mathbb{R}$

(b) $[f(x)]^2 = (2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$; $domf[f(x)]^2 = \mathbb{R}$

(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 6 - 3 = 4x - 9$; $dom(f \circ f) = \mathbb{R}$.

9. Solución:

(a) $g(x) = 5x^2 - 4$

$g(-x) = 5(-x)^2 - 4 = 5x^2 - 4$

$g(-x) = g(x) = 5x^2 - 4$: g es una función par.

(b) $f(x) = x^3 + 1$

$f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1 \neq f(x)$: f no es una función par

$-f(x) = -(x^3 + 1) = -x^3 - 1 \neq f(-x)$: f no es una función impar

f no es ni par ni impar.

(c) $f(t) = 4t^5 + 3t^3 - 2t$

$f(-t) = 4(-t)^5 + 3(-t)^3 - 2(-t) = -4t^5 - 3t^3 + 2t = -(4t^5 + 3t^3 - 2t)$

$f(-t) = -f(t)$: f es una función impar

(d) $g(r) = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$

$g(-r) = \dfrac{(-r)^2 - 1}{(-r)^2 + 1} = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$

$g(-r) = g(r) = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$: g es una función par.

(e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$f(-x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -x > 0 \\ -1 & \text{si } -x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} = -f(x)$

$f(-x) = -f(x)$: f es una función impar

(f) $h(x) = \dfrac{4x^2 - 5}{2x^3 + x}$

$h(-x) = \dfrac{4(-x)^2 - 5}{2(-x)^3 + (-x)} = \dfrac{4x^2 - 5}{-2x^3 - x} = -\dfrac{4x^2 - 5}{2x^3 + x} = -h(x)$

$h(-x) = -h(x)$: h es una función impar.

(g) $f(z) = (z - 1)^2$

$f(-z) = (-z - 1)^2 = (z + 1)^2 \neq f(z)$: f no es una función par

$-f(z) = -(z - 1)^2 \neq f(-z)$: f no es una función impar

f no es ni par ni impar.

(h) $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$

$g(-x) = \dfrac{|-x|}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$

$g(-x) = g(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$: g es una función par.

(i) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$g(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$

$g(-x) = g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$: g es una función par.

(j) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$

$f(-x) = -f(x)$: f es una función impar

10. Solución:

$$f(x) = \frac{1}{x+1},\ g(x) = \frac{1-x}{x}$$

$$f(g(x)) = \frac{1}{\frac{1-x}{x}+1} = \frac{1}{\frac{1-x+x}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$$g(f(x)) = \frac{1-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{x+1-1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{x}{1} = x$$

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x;$$

$\therefore$ f y g son funciones *inversas*.

11. $f(x) = x^2 + 2x + 2$

Solución:

Encuentre dos funciones g para las cuales

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$f(g(x)) = (g(x))^2 + 2(g(x) + 2 = x^2 - 4x + 5,$$

$$\Rightarrow \quad (g(x))^2 + 2(g(x) - (x^2 - 4x + 3) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4(x^2 - 4x + 3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4x^2 - 16x + 12}}{2},$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \frac{-2 \pm \sqrt{4x^2 - 16x + 16}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{2} = -1 \pm \sqrt{(x-2)^2},$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = -1 \pm (x-2);$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = -1 + x - 2 \quad \text{y} \quad g(x) = -1 - x + 2;$$

$\therefore$ Las funciones son $g(x) = x - 3$ y $g(x) = -x + 1$.

12. Solución:

$$g(z) = 4^{z} \quad (1)$$

$$g(z+1) = 4^{z+1} \quad (2)$$

$$g(z+1) - g(z) = 3g(z) \quad (3)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3), se obtiene:

$$4^{z+1} - 4^{z} = 3 \cdot 4^{z},$$

$$\Rightarrow \quad 4^{z}(4-1) = 3 \cdot 4^{z} \qquad \{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow \quad 4^{z}(3) = 3 \cdot 4^{z} \qquad \{\text{reduciendo}\};$$

$$\therefore \quad 3 \cdot 4^{z} = 3 \cdot 4^{z}$$

Situaciones que involucran resolución de ejercicios y ecuaciones de primer grado con una incógnita

Unidad de aprendizaje III:	Manejo de operaciones con funciones algebraicas.
Resultado de aprendizaje: 3.2	Resuelve problemas reales, mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas.
Ejercicio núm. 27:	Resolver ejercicios que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita y proponer ejercicios a partir de una ecuación dada

Ejemplo A
Pedro y Cecilia tienen entre los dos 57 láminas y Cecilia tiene 11 más que Pedro, ¿cuántas láminas tiene cada uno?

Ejemplo B Ana María decide salir a correr todas las mañanas y se desafía a sí misma a aumentar su recorrido en 1/2 km, por día. Sumando lo recorrido cada día, al cabo de 9 días el recorrido acumulado es igual a 58,5 km, ¿cuánto corrió el décimo día?

Consideraciones adicionales:

- □ El primer ejercicio se puede resolver aritméticamente, aunque muchos utilizan el método de ensayo y error, con apoyo de una tabla para ordenar los valores; para el segundo, es menos claro un procedimiento aritmético.
- □ Es importante que los alumnos se habitúen a establecer en primer lugar qué designa la incógnita.
- □ La intención es perfilar la ecuación como una herramienta que permite sintetizar las relaciones entre los datos del ejercicio. Además, organiza los cálculos necesarios para determinar el valor de la incógnita.
- □ A veces los alumnos suponen que resuelta la ecuación está resuelto el ejercicio. Es necesario que se habitúen a explicar la respuesta al ejercicio.
- □ En el caso del segundo ejemplo podría considerarse que la incógnita correspondiera al quinto día; con esa decisión, al efectuar la suma se obtiene: $9x = 58,5$.

Unidad de aprendizaje III:	Manejo de operaciones con funciones algebraicas.
Resultado de aprendizaje: 3.2	Resuelve problemas reales, mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas.
Ejercicio/ejercicio/actividad núm. 28:	Analizar ecuaciones y señalar las condiciones para que tengan solución.

Ejemplo A Analizar las ecuaciones

$$2(x + 5) = 5x - (3x - 8)$$
$$2(x + 7) - 3 = 2x + 11$$
$$x - 5 + (x + 3) = 3a + x$$

Consideraciones adicionales:

- □ Que los alumnos resuelvan y analicen diversas ecuaciones con coeficientes numéricos y con coeficientes literales. Que se acostumbren a soluciones enteras, decimales y fraccionarias: positivas y negativas. Además es muy interesante discutir la existencia de soluciones.

Unidad de aprendizaje III:	Manejo de operaciones con funciones algebraicas.
Resultado de aprendizaje: 3.2	Resuelve problemas reales, mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas.
Ejercicio núm. 29:	Argumentar razonadamente para fundamentar y validar sus aseveraciones.

Ejemplo A

Demostrar que la suma de tres números consecutivos es siempre múltiplo de 3.

***Consideraciones adicionales*:**

- □ Es muy importante observar cómo los alumnos abordan este desafío; ¿logran simbolizar tres números cualesquiera o plantean ejemplos con tres números específicos?

Ejemplo B

Determinar la suma de los n primeros números naturales.

Consideraciones adicionales:

- □ Esta es otra manera de preguntar por los números triangulares y el ejercicio planteado en la primera parte de esta unidad.
- □ Es probable que sea necesario dar algunas orientaciones para obtener esta suma. Una alternativa es una representación gráfica al estilo de cómo se pueden ordenar los tarros de conserva en un supermercado; el dibujo que sigue indica la suma de los 13 primeros números naturales, utilizando un rectángulo de 13 x 14.

```
o o o o o o o o o o o o o
x o o o o o o o o o o o o
x x o o o o o o o o o o o
x x x o o o o o o o o o o
x x x x o o o o o o o o o
x x x x x o o o o o o o o
x x x x x x o o o o o o o
x x x x x x x o o o o o o
x x x x x x x x o o o o o
x x x x x x x x x o o o o
x x x x x x x x x x o o o
x x x x x x x x x x x o o
x x x x x x x x x x x x o
x x x x x x x x x x x x x
```

- □ También se puede orientar por un lado más numérico, al estilo de cómo Gauss obtuvo la suma de los 100 primeros números naturales, ordenando los números para obtener sumas parciales iguales: 1 + 13 = 2 + 12 = ... = 14, lo que equivale a las columnas de la representación anterior.

Ejemplo C ¿Para cuáles valores enteros positivos de n, la expresión 36/(n + 2) es un número entero?

Consideraciones adicionales:

- Siempre es interesante comparar las estrategias de resolución de los ejercicios. Es posible que para éste, algunos hayan probado con los 34 números, tomados sucesivamente a partir de 1. Otros, en cambio, pueden haber partido seleccionando los divisores de 36. Es necesario destacar la importancia de una buena estrategia, en términos de economía de tiempo, claridad, precisión, poder de síntesis.

Unidad de aprendizaje III:	Manejo de operaciones con funciones algebraicas.
Resultado de aprendizaje: 3.2	Resuelve problemas reales, mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas.
Ejercicio núm. 30:	Resuelve problemas con ecuaciones lineales

1 El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por importe de 500 $ (sin impuestos). El valor del vino es 60 $ menos que el de los refrescos y de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que los refrescos deben pagar un IVA del 6%, por la cerveza del 12% y por El vino del 30%, lo que hace que la factura total con impuestos sea de 592.4 $, calcular la cantidad invertida en cada tipo de bebida.

x = Importe en $ de los refrescos. x=120 $
y = Importe en $ de la cerveza. y=160
z = Importe en $ del vino. z=220

$$\begin{cases} x+y+z=500 \\ x+y-z=60 \\ \dfrac{6x}{100}+\dfrac{12y}{100}+\dfrac{30z}{100}=92.4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=500 \\ x+y-z=60 \\ 6x+12y+30z=9240 \end{cases}$$

X = 120$ Y=160$ Z= 220$

2 Una empresa tiene tres minas con menas de composiciones

	Níquel (%)	Cobre (%)	Hierro (%)
Mina A	1	2	3
Mina A	2	5	7
Mina C	1	3	1

¿Cuántas toneladas de cada mina deben utilizarse para obtener 7 toneladas de níquel, 18 de cobre y 16 de hierro?

x = nº de toneladas de la mina A. x=200
y = nº de toneladas de la mina B. y=100
z = nº de toneladas de la mina C. z=300

$$\begin{cases} \frac{x}{100} + \frac{2y}{100} + \frac{z}{100} = 7 \\ \frac{2x}{100} + \frac{5y}{100} + \frac{3z}{100} = 18 \\ \frac{3x}{100} + \frac{7y}{100} + \frac{z}{100} = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - z = 700 \\ 2x + 5y + 3z = 1800 \\ 3x + 7y + z = 1600 \end{cases}$$

X = 200 Y=100 Z= 300

3 La edad de un padre es doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos), la edad del padre era triple que la suma de las edades, en aquel tiempo, de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de las tres personas será 150 años. ¿Qué edad tenía el padre en el momento de nacer sus hijos?

x = Edad actual del padre
y = Edad actual del hijo mayor
z = Edad actual del hijo menor
Relación actual: x = 2(y + z)
Hace y - z años: x - (y - z) = 3[y - (y - z) + z - (y - z)]
Dentro de y + z: x + (y + z) + y + (y + z) + z + (y + z) = 150

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ x + 2y - 8z = 0 \\ x + 4y + 4z = 150 \end{cases}$$

X = 50 Y=115 Z= 10

Al nacer los hijos, el padre tenía 35 y 40 años, respectivamente

4 Se venden tres especies de cereales: trigo, cebada y mijo
Cada volumen de trigo se vende por 4 $, el de la cebada por 2 $ y el de mijo por 0.5 $
Si se vende 100 volúmenes en total y si obtiene por la venta 100 $, ¿cuántos volúmenes de cada especie se venden

x = Volumen de trigo
y = Volumen de cebada
z = Volumen de mijo

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 4x + 2y + 0.5z = 100 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + z = 100 - x \\ 4y + z = 200 - 8x \end{cases}$$

$$y = \frac{100 - 7x}{3} \qquad z = \frac{200 + 4x}{3}$$

Considerando que las tres variables son números naturales, y que su suma es 100, obtenemos las siguientes soluciones:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
X	1	4	7	10	13
Y	31	24	17	10	3
Z	68	72	76	80	84

5. Se tienen tres lingotes compuestos del siguiente modo:
El primero de 20 g de oro, 30 g de plata y 40 g de cobre.
El segundo de 30 g de oro, 40 g de plata y 50 g de cobre.
El tercero de 40 g de oro, 50 g de plata y 90 g de cobre

Se pide qué peso habrá de tomarse de cada uno de los lingotes anteriores para formar un nuevo lingote de 34 g de oro, 46 g de plata y 67 g de cobre

x = Peso del 1er lingote
y = Peso del 2º lingote
z = Peso del 3er lingote

En el 1er lingote, la ley del oro es: 20/90 = 2/9
En el 2º lingote, la ley del oro es: 30/120 = 1/4
En el 3 er lingote, la ley del oro es: 40/180 = 2/9

La ecuación para el oro es:

$$\frac{2x}{9} + \frac{y}{4} + \frac{2z}{9} = 34$$

En el 1er lingote, la ley de la plata es: 30/90 = 1/3
En el 2º lingote, la ley de la plata es: 40/120 = 1/3
En el 3 er lingote, la ley de la plata es: 50/180 = 5/18

La ecuación para la plata es

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{5z}{18}=46$$

En el 1er lingote, la ley del cobre es: 40/90 = 4/9
En el 2ºlingote, la ley del cobre es: 50/120 = 5/12
En el 3 er lingote, la ley del cobre 90/180 = 1/2

La ecuación para el cobre es: 90/180 = ½

$$\frac{4x}{9}+\frac{5y}{12}+\frac{z}{2}=67$$

$$\begin{cases} 8x+9y+8z=1224 \\ 6x+6y+5z=828 \\ 16x+15y+18z=2412 \end{cases}$$

x = 45 y = 48 z = 54

Consideraciones adicionales:

- Los alumnos pueden plantear diversos ejercicios, relativos a dinero, edades, tiempo, medidas, número de personas, etc. Analizan la diversidad de ejercicios que se pueden resolver por medio de una misma ecuación.
- Interesa que los alumnos se percaten de que una misma ecuación puede representar una diversidad de ejercicios.

Unidad de aprendizaje III:	Manejo de operaciones con funciones algebraicas.
Resultado de aprendizaje: 3.3	Resuelve problemas reales, mediante funciones y ecuaciones cuadráticas.
Ejercicio núm. 31:	Ejercicios teóricos y problemas cotidianos con ecuaciones de segundo grado.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1 $7x^2 + 21x - 28 = 0$

$X^2 + 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{matrix} \nearrow x_1 = 1 \\ \searrow x_2 = -4 \end{matrix}$$

2 $-x^2 + 4x - 7 = 0$

$x^2 - 4x + 7 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-28}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-12}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$$

3 $12x^2 - 3x = 0$

$4x^2 - x = 0$

$x \cdot (4x - 1) = 0$

$x = 0$

$4x - 1 = 0$ **$x = 1/4$**

4 $4x^2 - 16 = 0$

$4x^2 = 16$ $x^2 = 4$ $x = \pm\sqrt{4} \begin{matrix} \nearrow x_1 = 2 \\ \searrow x_2 = -2 \end{matrix}$

5 $x^4 + 12x^3 - 64x^2 = 0$

$x^2(x^2 + 12x - 64) = 0$

$x^2 = 0$ $x_1 = 0$

$x^2 + 12x - 64 = 0$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144+256}}{2} = \frac{-12 \pm 20}{2} = \begin{matrix} \nearrow x_2 = 4 \\ \searrow x_3 = -16 \end{matrix}$$

6 $\frac{3}{x} = 1 + \frac{x-13}{6}$

m.c.m. (x,6) = 6x

$18 = 6x + x(x - 13)$

$18 = 6x + x^2 - 13x$

$x^2 - 7x - 18 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49+72}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{7 \pm 11}{2} = \begin{matrix} \nearrow x_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ \searrow x_2 = \frac{-4}{2} = -2 \end{matrix}$$

$\frac{3}{9} = 1 + \frac{9-13}{6}$ $\frac{3}{9} = \frac{6-4}{6}$ $\frac{3}{9} = \frac{2}{6}$ $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\frac{3}{-2} = 1 + \frac{-2-13}{6}$ $\frac{3}{-2} = \frac{6-15}{6}$ $\frac{3}{-2} = \frac{-9}{6}$ $-\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$

7 $x^4 - 61x^2 + 900 = 0$

$x^2 = t$

$t^2 - 61t + 900 = 0$

$$t = \frac{61 \pm \sqrt{3721 - 3600}}{2} = \frac{61 \pm 11}{2} = \begin{array}{l} \nearrow t_1 = 36 \\ \searrow t_2 = 25 \end{array}$$

$$x^2 = 36 \qquad x = \pm\sqrt{36} \begin{array}{l} \nearrow x_1 - 6 \\ \searrow x_2 = -6 \end{array}$$

$$x^2 - 25 \qquad x - \pm\sqrt{25} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 5 \\ \searrow x_2 = -5 \end{array}$$

8 $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

$x^2 = t$

$t^2 - 25t + 144 = 0$

$$t = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{array}{l} \nearrow t_1 = 16 \\ \searrow t_2 = 9 \end{array}$$

$$x^2 = 16 \qquad x = \pm\sqrt{16} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 4 \\ \searrow x_2 = -4 \end{array}$$

$$x^2 = 9 \qquad x = \pm\sqrt{9} \begin{array}{l} \nearrow x_0 = 3 \\ \searrow x_4 = -3 \end{array}$$

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones

9 $\begin{cases} 5x-3y-z=1 \\ x+4y-6z=-1 \\ 2x+3y+4z=9 \end{cases}$ E_1-5E_2 $\begin{cases} 5x-3y-z=1 \\ \underline{-5x-20y+30z=5} \end{cases}$ $-23y+29z=6$ $-2E_2+E_3$ $\begin{cases} -2x-8y+12z=2 \\ \underline{2x+3y+4z=9} \end{cases}$ $-5y+16z=11$

$\begin{cases} x+4y-6z=-1 \\ -23y+29z=6 \\ -5y+16z=11 \end{cases}$ 5E3 +23E3 $\begin{array}{r} 115y-145z=-30 \\ \underline{-115y+368z=253} \\ 223z=223 \end{array}$ $z=1$

$\begin{cases} x+4y-6z=-1 \\ -23y-29z=1 \\ z=1 \end{cases}$ $-23y+29\cdot 1=6$ $y=1$ $x+4\cdot 1-6\cdot 1=-1$ $x=1$

10 $\begin{cases} x+y=7 \\ x\cdot y=12 \end{cases}$

$y=7-x$

$x\cdot(7-x)=12$ $7x-x^2=12$ $x^2-7x+12=0$

$x\cdot(7-x)=12$ $7x-x^2=12$ $x^2-7x+12=0$

$x=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{7\pm 1}{2}$ $\nearrow x_1=4$ $\searrow x_2=3$

$x_1=4$ $y=7-4$ $y_1=3$

$x_2=3$ $y=7-3$ $y_2=4$

11 Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro

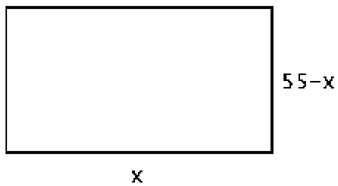
Edad actual → x, Edad hace 13 años → x −13, Edad dentro de 11 años → x + 11

$x+11=\frac{(x-13)^2}{2}$

$2x+22=x^2-26x+169$ $x^2-28x+147=0$

$x=21$ $\cancel{x=7}$ Edad actual → 21

12 Para cercar una finca rectangular de 750 m² se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca



Semiperímetro→ 55, Base→ x, Altura →55 − x

$x(55 - x) = 750, \quad x^2 - 55x + 750 = 0$

$x = 25, \; x = 30$
Las dimensiones de la finca son 30 m y 25 m

13 Halla una fracción equivalente a 5/7cuyos términos elevados al cuadrado sumen 1184

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{7} \\ x^2 + y^2 = 1184 \end{cases}, \quad x = \frac{5}{7}y,$$

$$\left(\frac{5}{7}y\right)^2 + y^2 = 1184 \qquad \frac{25}{49}y^2 + y^2 = 1184$$

$$25y^2 + 49y^2 = 58016 \qquad 74y^2 = 58016 \qquad y^2 = \frac{58016}{74}$$

$$y^2 = 784 \qquad y = \pm 28$$

$$x = \frac{5}{7}\cdot(\pm 28) = \pm 20$$
$$x = 20 \qquad y = 28, \; x = -20 \qquad y = -28$$

Unidad de aprendizaje III:	Manejo de operaciones con funciones algebraicas.
Resultado de aprendizaje: 3.4	Representa y resuelve situaciones de su entorno, empleando las operaciones básicas, la composición y la inversa de una función algebraica.
Ejercicio núm. 32:	Composición de funciones

Composición de funciones

Si tenemos dos **funciones: f(x) y g(x)**, de modo que el dominio de la 2ª esté incluido en el recorrido de la 1ª, se puede definir una nueva **función** que asocie a cada elemento del **dominio de f(x) el valor de g[f(x)].**

Ejemplos

$$f(x)=3x+2 \qquad g(x)=\frac{x+3}{2x+1}$$

$$g\circ f=g[f(x)]=g(3x+2)=$$

$$=\frac{3x+2+3}{2(3x+2)+1}=\frac{3x+5}{6x+5}$$

$$f\circ g=f[g(x)]=f\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)=$$

$$=3\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)+2=\frac{7x+11}{2x-1}$$

$$f(x)=\frac{x-2}{2x+1} \qquad g(x)=\sqrt{x}$$

$$g\circ f=g[f(x)]=g\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)=\sqrt{\frac{x+2}{2x+1}}$$

$$f\circ g=f[g(x)]=f(\sqrt{x})=\frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+1}$$

$$f(x)=\frac{1}{2x-1} \qquad g(x)=\frac{2x-1}{2x+1} \qquad h(x)=\frac{1}{x}$$

$$g\circ f = g[f(x)] = g\left(\frac{1}{2x-1}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{2x-1}\right)-1}{2\left(\frac{1}{2x-1}\right)+1} = \frac{-2x+3}{2x+1}$$

$$h\circ g\circ f = h[g\circ f(x)] = h\left(\frac{-2x+3}{2x+1}\right) = \frac{1}{\frac{-2x+3}{2x+1}} = \frac{2x+1}{-2x+3}$$

Función inversa o recíproca

Se llama **función inversa o reciproca de *f* a otra función f^{-1}** que cumple que: **Si f(a) = b, entonces f^{-1}(b) = a**
Ejemplos.

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

$$y = \frac{2x+3}{x-1} \qquad y(x-1) = 2x+3$$

$$2xy - y = 2x+3 \qquad 2xy - 2x = y+3$$

$$x(y-2) = y+3 \qquad x = \frac{y+3}{y-2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

Para x = 2, $f(2) = \frac{7}{1} = 7$, $f^{-1}(7) = \frac{10}{5} = 2$

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

$$y = \sqrt[3]{x-1} \qquad y^3 = x-1$$

$$x = y^3+1 \qquad f^{-1}(x) = x^3+1$$

$$f(x) = x^2$$

$$y = x^2 \qquad x = \pm\sqrt{y}$$

$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$ No es una función

Si dos **funciones** son **inversas** su **composición** es la **función identidad**

f **o** f^{-1} **=** f^{-1} **o** ***f*** **= x**

Hay que distinguir entre la **función inversa**, $f^{-1}(x)$, y la **inversa de una función** $\frac{1}{f(x)}$

Unidad I	Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades

Actividad 1

Resolver ejercicios para analizar diversas situaciones que permitan visualizar ritmos de crecimiento que se pueden describir por la multiplicación o la adición iterada de un mismo número.

Ejemplo A

Si, día a día, una planta acuática, duplica la superficie que cubre y en 20 días cubre totalmente una piscina, ¿en cuánto tiempo se cubre esa misma piscina, si inicialmente se tienen cuatro de estas plantas?

Importa considerar:

- Si interpretan correctamente la información presente en el ejercicio.
- En relación con la estrategia de solución utilizada, si recurren a una tabla de valores, a un diagrama de árbol, o bien, hacen uso de algún otro tipo de representación.
- En relación con la respuesta dada, si ésta refleja un crecimiento descriptible por las potencias.

Ejemplo B

Se sabe que la población de cierto tipo de insectos se cuadruplica cada semestre.

Si la población en este semestre es de 64 insectos:

a) calcular la población para el quinto semestre.

b) utilizando la notación de potencias, escribir una expresión que indique el número teórico de insectos al cabo de 10 semestres (se supone que todos los insectos permanecen vivos).

c) determinar el número de insectos hace dos semestres.

Importa considerar:

- Si interpretan correctamente la información presente en el ejercicio.
- En relación con la estrategia de solución utilizada, si utilizan dibujos o esquemas, tablas de valores u otro tipo de diagrama para representar la situación. Si cuadruplican los insectos semestre a semestre, si parten de 64 insectos, si dividen sucesivamente por cuatro para los semestres anteriores.
- Si todos los integrantes de los grupos están trabajando en forma colectiva o en trabajos individuales.
- Si en la repuesta al punto b) utilizan la notación de potencia o hacen sucesivas multiplicaciones por 4 para determinar el número de insectos al cabo del décimo semestre.

Actividad 2
Resolver ejercicios de distintos ámbitos: naturaleza, deportes, trabajos u oficios, comercio, ciencias, producción, etc., que requieran, no sólo la realización de cálculos con decimales y fracciones, sino que, además, generen la necesidad de hacer estimaciones y aproximar resultados, de relacionar la unidad de medida del resultado con los datos y las cifras significativas y, eventualmente, interpretar los resultados obtenidos en una calculadora.

Ejemplo A
El grosor que alcanzan 330 hojas de papel idénticas es de 6,8 cm. ¿Cuál es el grosor de una de esas hojas?

***Importa considerar*:**

- Si interpretan correctamente la información presente en el ejercicio.
- En relación con la realización de los cálculos y la respuesta:
  - Si hacen los cálculos con calculadora y el resultado está en notación científica, la interpretación que plantean.
  - La aproximación decimal y la unidad de medida señalada en la respuesta.

Ejemplo B
Una pelota de goma rebota hasta las 3/4 partes de la altura desde la que se la deja caer. Si la soltamos desde una altura de 16 metros, ¿cuál es la distancia que recorre esta pelota, una vez que toca el suelo por tercera vez?

***Importa considerar*:**

- Si interpretan correctamente la información presente en el ejercicio; ¿cómo interpretan la expresión “toca el suelo por tercera vez”?
- En relación con la estrategia de solución utilizada, si hacen uso de algún tipo de representación, esquema o dibujo.
- Los cálculos que realizan.

Actividad 3
Analizar situaciones y resolver ejercicios para discriminar y caracterizar los números racionales y los irracionales; su notación y/o aproximación decimal. Construir líneas que admiten como medida algunas raíces, y ubicarlas en la recta numérica.

Ejemplo A Sabiendo que a es un número tal que 23,5 < a < 23,8
¿Entre qué números se encuentra a + 10; 2a-5?

***Importa considerar*:**

- Si interpretan correctamente la información presente en la desigualdad.
- Si apoyan su reflexión en una recta numérica.
- Qué operatoria realizan con los extremos de la desigualdad.

Ejemplo B

Considerar los siguientes números: 0.33; 1/3; 3/10; 0.03; $(0.03)^2$

Reconocer, si existen, los que son iguales.

Ordenar estos números.

Importa considerar:

- Si confunden 1/3 con 0.33.
- Si discriminan que (0.03)2 es el menor.
- Si diferencian entre 0.33 y 3/10.

Actividad 1

Utilizar letras y expresiones simbólicas para representar números, categorías de números, patrones numéricos o geométricos y/o relaciones cuantitativas. Comparar el lenguaje habitual con el simbólico. Leer e interpretar expresiones simbólicas.

Ordenar y representar en una recta numérica expresiones simbólicas.

Ejemplo A

Para determinar los tres números consecutivos cuya suma es 1.011, un estudiante escribe: (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 1.011.

¿Qué representa n en esa ecuación?

Importa considerar:

- Si resuelven la ecuación y calculan el valor de n.
- Si sin resolver la ecuación indican que n es el anterior al menor número del trío.

Ejemplo B

En un texto dice que 2n + 1 representa los números impares. Otro texto dice que es 2n – 1. En cada caso, ¿qué valor toma n para expresar el vigésimo número impar?

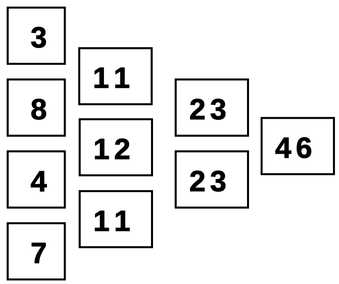
***Importa considerar*:**

- Si determinan numéricamente cuál es el número impar y si calculan n en cada caso.
- Si diferencian qué valor toma n para el número 1 y extrapolan para el vigésimo.
- Si buscan otra manera de discernir.

Ejemplo C

Este es una propuesta para desarrollarla en grupos de trabajo.

El diagrama que sigue muestra una forma de ubicar los dígitos 3, 4, 7, 8; se suman de dos en dos y se obtiene un resultado final.



¿Cómo se ordenan inicialmente los números para que la suma final sea la máxima?

Importa considerar:

- Si cambian los números al azar en la primera columna.
- Si tienen algún método o sistema de trabajo, si hacen algún tanteo sistemático.
- Si utilizan letras para representar los números.

Ejemplo D Si x = 0.00001, ordenar los siguientes números 3 + x; 3 – x; 3x; 3/x;

***Importa considerar*:**

- Si hacen todos los cálculos y los ordenan posteriormente (incluso podría ser con calculadora).
- Si ordenan sin hacer cálculos sino que por el significado de un decimal menor que 1 en un cálculo.

Actividad 2

Utilizar la notación a^n en que a es un número positivo y n es un entero. Reducir términos semejantes, ejercitar la multiplicación y división de potencias.

Ejemplo A

Una empresa ofrece un incentivo económico a sus empleados además de los sueldos.

Propone dos formas para que ellos elijan.

Una propuesta se inicia con $3.000 en la primera semana los que se incrementan semanalmente en $1.000.
La otra propuesta se inicia con $10 en la primera semana, y se duplica semanalmente lo recibido en la semana anterior.
¿Qué expresiones traducen estas situaciones para la enésima semana?

Importa considerar:

- Si comprenden el ejercicio.
- Si recurren a una tabla de valores o a un diagrama que les ayude a encontrar la forma de notación.
- Si logran establecer que el exponente y el factor para la enésima semana es (n – 1).

Actividad 3
Proponer ejercicios a partir de ecuaciones determinadas.

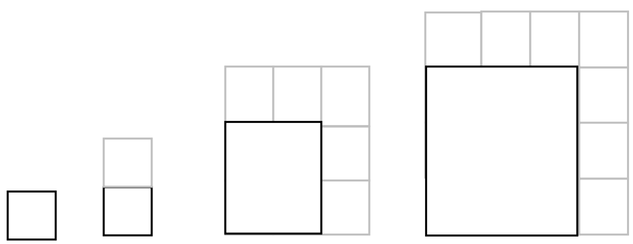
Ejemplo A. Esta propuesta es para trabajo en grupo.
Inventar ejercicios a partir de algunas ecuaciones sencillas, tales como:

$2x + 5 = 34$;
$x + 5.600 = 10.000$;
$300 – x = 770$.

***Importa considerar*:**

- Si los ejercicios propuestos son acordes con las ecuaciones.
- Los temas incorporados a los ejercicios.

Actividad 4
Argumentar razonadamente para fundamentar y validar las aseveraciones.
Ejemplo Observar el diagrama siguiente:



Describir la regla de formación, indicando el número de cuadraditos que se agregan cada vez y el número que corresponde al total de cuadraditos en cada caso.

Considerando la descripción anterior, ¿cuánto es 1 + 3 + 5 + ... + 55 ?

***Importa considerar*:**

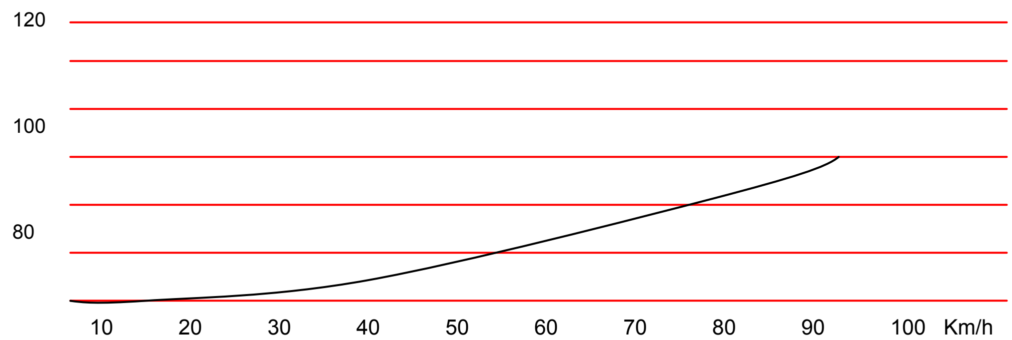
- Los análisis que realicen para determinar la ley de formación de las figuras.
- Cómo determinan cuál es el cuadrado asociado a la suma propuesta.

Actividad 1

Leer, interpretar y comunicar información sintetizada en gráficos de diversos tipos: de barra, poligonales, circulares, pictogramas variados, que se refieran a diversidad de temas. Reconocer las variables consideradas, qué representan los ejes, el significado de los cambios en los valores de las variables.

Ejemplo

El gráfico muestra la distancia que requiere un vehículo para detenerse, desde el momento en que se le aplican los frenos, considerando la velocidad.



De acuerdo a esta información, ¿aproximadamente, cuántos metros son necesarios para detener un vehículo que avanza a 100 km/h?

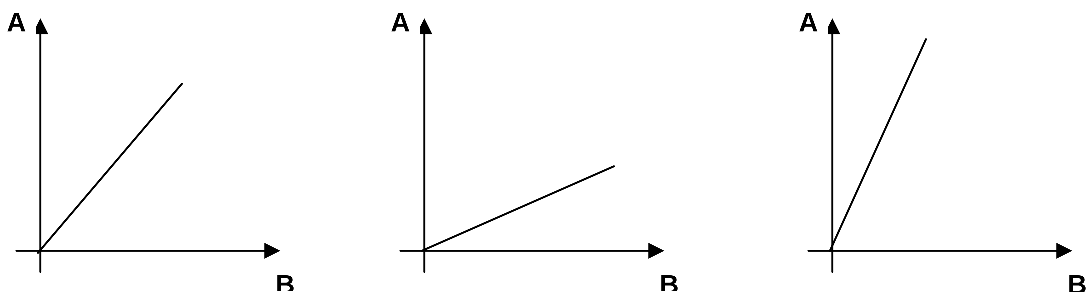
Si el vehículo necesitó casi 40 metros para detenerse, ¿a qué velocidad se desplazaba el vehículo?

Importa considerar:

- Si identifican las variables que representa cada eje.
- Si leen bien el gráfico.
- Si extrapolan el valor para la velocidad de 100 km/h.

Actividad 2
Resolver ejercicios que involucran proporcionalidad directa. Reconocer la constante de proporcionalidad, utilizar la representación gráfica y expresar la relación entre las variables.

Ejemplo A.
Los gráficos siguientes ilustran la relación de cambio de las monedas de los países A y B durante los semestres 2001, 2002, 2003.
¿Qué conclusiones puede establecer a partir de la lectura de estos tres gráficos?
Por una moneda del país B, ¿en qué semestre corresponde más monedas del país A?



2001 2002 2003

Importa considerar:
- Si interpretan las diferencias entre los gráficos.
- Si pueden fundamentar su respuesta a la segunda pregunta.

Actividad 3
Resolver ejercicios que involucran proporcionalidad inversa por medio de tablas de valores, reducción a la unidad y/o ecuaciones.

Ejemplo A.
Se dispone de un cuadrado de 80 metros de perímetro. Señalar todos los rectángulos que tienen un área equivalente a la del cuadrado y cuyos lados son números enteros.
Este es un ejercicio de proporcionalidad inversa. ¿Cuáles son las variables que intervienen?, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

Importa considerar:

- Si distinguen los conceptos de área y perímetro.
- Si reconocen los números enteros positivos.
- Si identifican las variables involucradas en proporcionalidad inversa.

Actividad 4

Recoger información sobre el uso de los porcentajes en la vida diaria y resolver ejercicios a partir de esa información. Relacionar el cálculo de porcentaje con los decimales y las fracciones; constatar la equivalencia de diversos procedimientos; utilizar el cálculo mental y el cálculo aproximado. Interpretar el tanto por ciento como operador multiplicativo.

Ejemplo

La tabla siguiente resume la asistencia a clases en cinco cursos, el primer lunes de abril, en un Instituto de Idiomas.

Idioma	Total de alumnos	Asistentes	% Ausentes
Inglés	129	114	
Francés	40	36	
Alemán	65	52	
Portugués	35	21	
Japonés	58	29	

¿Cuál es el porcentaje promedio de asistencia a este Instituto?

Importa considerar:

- Si calculan bien los porcentajes de ausencia.
- Si suman y promedian esos porcentajes.
- Si suman los totales de alumnos y de asistentes y calculan el porcentaje.

Actividad 5

Resolver ejercicios de cálculo de porcentaje en los que el referente asociado a 100 no está explícito. Relacionar el cálculo de porcentaje con los decimales y las fracciones. Interpretar el tanto por ciento como operador multiplicativo. Calcular porcentajes sucesivos y porcentajes promedios.

Ejemplo

¿A qué descuento único son equivalentes dos descuentos sucesivos del 30% y del 40%?

¿Es equivalente si se invierte el orden, primero el de 40% y después el de 30%? ¿Por qué?

Importa considerar:

- Si hacen cálculos tomando un referente cualquiera o considerando 100.
- Si en cada caso plantean los cálculos o bien multiplican por 0.1 y por 0.2 sucesivamente.
- Si multiplican por 0.7 y 0.6.
- Si contestan sin necesidad de hacer los cálculos fundamentando en lo multiplicativo.
- Si contestan sin hacer cálculos fundamentando en lo aditivo.

Actividad 6

Las publicaciones especializadas en deporte, incluyen en las tablas de posiciones de los equipos de fútbol una columna de rendimiento expresada en porcentaje.

La siguiente es una parte de una tabla:

Puesto	Equipo	Puntos	JJ	JG	JE	JP	GF	GC	DIF	Rend.
1°	A	10	4	3	1	0	8	3	5	83.3%
2°	B	9	3	3	0	0	11	2	9	100%
3°	C	9	3	3	0	0	8	1	7	100%
4°	D	6	4	2	0	2	10	7	3	50%

¿Qué significa este porcentaje de rendimiento?

¿Cómo se explica que el segundo y tercer lugar tengan un rendimiento más alto que el del primer lugar?

***Importa considerar*:**

- Si comprenden la nomenclatura de estas tablas; puede que sea necesario que alguien con conocimientos de fútbol explique los significados.
- Si logran definir qué es el porcentaje de rendimiento que se calcula sobre el total de puntos posibles según el número de partidos jugados.

Actividad 7

Utilizar el lenguaje simbólico en el cálculo de porcentaje.

Ejemplo Este ejemplo se puede desarrollar en grupo.

Una distribuidora de guantes para el trabajo en la industria metalúrgica tiene la siguiente oferta:

- Por compras sobre 200 pares, 0.5% de descuento;
- sobre 500 pares, 1% de descuento;
- Sobre 1.000 pares 10% de descuento;
- Por pago al contado 7,5% de descuento.

Si una empresa necesita comprar 900 pares de guantes, ¿cuál oferta es más conveniente? ¿por qué?

Importa considerar:

- La comprensión que tienen del ejercicio.
- El tipo de cálculo que realizan:
  - Si suponen un valor para los guantes
  - Si los guantes valen $**a**
  - Si hacen los cálculos de descuento y restan
  - Si determinan el operador multiplicativo

Actividad 8

Calcular productos entre polinomios cualesquiera, determinar factores, eliminar paréntesis y reducir términos semejantes. Ejercitar el cálculo de productos y de factores

Ejemplo

Calcular el valor de:

a) (2 + 4 + 6 + 8 + 10) /(3 + 6 +9 + 12 + 15);

b) (2 + 4 + 6 + 8 + 10 +...+ 200)/(3 + 6 +9 + 12 + 15+ ... + 300)

Importa considerar:

- Si hacen los cálculos numéricos.
- Si se percatan de que estas sumas se pueden factorizar.
- Si usan la factorización como una estrategia de trabajo.

Actividad 9

Resolver ejercicios de diversos ámbitos, principalmente geométrico, que involucran operatoria simbólica. Analizar fórmulas de volúmenes, áreas y perímetros y los cambios que se generan por variaciones en las medidas lineales de las figuras. Plantear demostraciones sencillas.

Ejemplo A
Si se duplica el radio de un círculo, ¿en cuánto aumenta su perímetro?, ¿en cuánto aumenta su área? Fundamente su respuesta.

Interesa observar

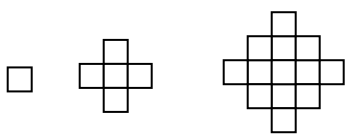
- Si comprenden el ejercicio, si hacen algún dibujo o esquema.
- Si le asignan algún valor numérico al radio y calculan con ese valor.
- Si trabajan directamente con la fórmula.

Ejemplo B.
Demostrar que la diferencia entre dos cuadrados sucesivos es siempre impar.

***Importa considerar*:**

- Si comprenden el significado de dos cuadrados sucesivos.
- Si consideran diversos ejemplos numéricos para responder.
- Si pueden expresarlo como diferencia en lenguaje simbólico y hacer las reducciones correspondientes.

Ejemplo C
Observar la siguiente secuencia de figuras. Describir cómo se forma una a partir de la anterior.



Establecer cuántos cuadrados son necesarios para formar la décima figura.
¿Cuántos cuadrados se necesitan para la enésima figura?

Importa considerar:

- Si logran descubrir algún patrón de formación.
- Si necesitan hacer las figuras hasta la décima para responder la pregunta.
- Si logran expresar la forma general.

II. Guía de evaluación del módulo Manejo espacios cantidades

7. Descripción

La guía de evaluación es un documento que define el proceso de recolección y valoración de las evidencias requeridas por el módulo desarrollado y tiene el propósito de guiar en la evaluación de las competencias adquiridas por los alumnos, asociadas a los Resultados de Aprendizaje; en donde además, describe las técnicas y los instrumentos a utilizar y la ponderación de cada actividad de evaluación. Los Resultados de Aprendizaje se definen tomando como referentes: las **competencias genéricas** que va adquiriendo el alumno para desempeñarse en los ámbitos personal y profesional que le permitan convivir de manera armónica con el medio ambiente y la sociedad; las **disciplinares**, esenciales para que los alumnos puedan desempeñarse eficazmente en diversos ámbitos, desarrolladas en torno a áreas del conocimiento y las **profesionales** que le permitan un desempeño eficiente, autónomo, flexible y responsable de su ejercicio profesional y de actividades laborales específicas, en un entorno cambiante que exige la multifuncionalidad.

La importancia de la evaluación de competencias, bajo un enfoque de **mejora continua**, reside en que es un proceso por medio del cual se obtienen y analizan las evidencias del desempeño de un alumno con base en la guía de evaluación y rúbrica, para emitir un juicio que conduzca a tomar decisiones.

La evaluación de competencias se centra en el desempeño real de los alumnos, soportado por evidencias válidas y confiables frente al referente que es la guía de evaluación, la cual, en el caso de competencias profesionales, está asociada con una norma técnica de competencia laboral (NTCL), de institución educativa o bien, una normalización específica de un sector o área y no en contenidos y/o potencialidades.

El **Modelo de Evaluación** se caracteriza porque es **Confiable** (que aplica el mismo juicio para todos los alumnos), **Integral** (involucra las dimensiones intelectual, social, afectiva, motriz y axiológica), **Participativa** (incluye autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación), **Transparente** (congruente con los aprendizajes requeridos por la competencia), **Válida** (las evidencias deben corresponder a la guía de evaluación).

Evaluación de los Aprendizajes.

Durante el proceso de enseñanza - aprendizaje es importante considerar tres categorías de evaluación: **diagnóstica, formativa y sumativa**.

La evaluación **diagnóstica** nos permite establecer un **punto de partida** fundamentado en la detección de la situación en la que se encuentran nuestros alumnos. Permite también establecer vínculos socio-afectivos entre el PSP y su grupo. El alumno a su vez podrá obtener información sobre los aspectos donde deberá hacer énfasis en su dedicación. El PSP podrá **identificar las características del grupo y orientar adecuadamente sus estrategias**. En esta etapa pueden utilizarse mecanismos informales de recopilación de información.

La evaluación **formativa** se realiza durante todo el proceso de aprendizaje del alumno, en forma constante, ya sea al finalizar cada actividad de aprendizaje o en la integración de varias de éstas. Tiene como finalidad **informar a los alumnos de sus avances** con respecto a los aprendizajes que deben alcanzar y advertirle sobre dónde y en qué aspectos tiene debilidades o dificultades para poder regular sus procesos. Aquí se admiten errores, se identifican y se corrigen; es factible trabajar colaborativamente. Asimismo, el PSP puede asumir nuevas estrategias que contribuyan a mejorar los resultados del grupo.

Finalmente, la evaluación **sumativa** es adoptada básicamente por una función social, ya que mediante ella se asume una acreditación, una promoción, un fracaso escolar, índices de deserción, etc., a través de **criterios estandarizados y bien definidos**. Las evidencias se elaboran en forma individual, puesto que se está asignando, convencionalmente, un criterio o valor. Manifiesta la síntesis de los logros obtenidos por ciclo o período escolar.

Actividades de Evaluación

Los programas de estudio están conformados por Unidades de Aprendizaje (UA) que agrupan Resultados de Aprendizaje (RA) vinculados estrechamente y que requieren irse desarrollando paulatinamente. Dado que se establece un resultado, es necesario comprobar que efectivamente éste se ha alcanzado, de tal suerte que en la descripción de cada unidad se han definido las actividades de evaluación indispensables para evaluar los aprendizajes de cada uno de los RA que conforman las unidades.

Esto no implica que no se puedan desarrollar y evaluar otras actividades planteadas por el PSP, pero es importante no confundir con las actividades de aprendizaje que realiza constantemente el alumno para contribuir a que logre su aprendizaje y que, aunque se evalúen con fines formativos, no se registran formalmente en el **Sistema de Administración Escolar SAE**. El **registro formal** procede sólo para las actividades descritas en los programas y planes de evaluación.

De esta manera, cada uno de los RA tiene asignada al menos una actividad de evaluación, a la cual se le ha determinado una ponderación con respecto a la Unidad a la cual pertenece. Ésta a su vez, tiene una ponderación que, sumada con el resto de Unidades, **conforma el 100%.** Es decir, para considerar que se ha adquirido la competencia correspondiente al módulo de que se trate, deberá **ir acumulando** dichos porcentajes a lo largo del período para estar en condiciones de acreditar el mismo. Cada una de estas ponderaciones dependerá de la relevancia que tenga la AE con respecto al RA y éste a su vez, con respecto a la Unidad de Aprendizaje. Estas ponderaciones las asignará el especialista diseñador del programa de estudios.

La ponderación que se asigna en cada una de las actividades queda asimismo establecida en la **Tabla de ponderación**, la cual está desarrollada en una hoja de cálculo que permite, tanto al alumno como al PSP, ir observando y calculando los avances en términos de porcentaje, que se van alcanzando (ver apartado 7 de esta guía).

Esta tabla de ponderación contiene los Resultados de Aprendizaje y las Unidades a las cuales pertenecen. Asimismo indica, en la columna de actividades de evaluación, la codificación asignada a ésta desde el programa de estudios y que a su vez queda vinculada al Sistema de Evaluación Escolar SAE. Las columnas de aspectos a evaluar, corresponden al tipo de aprendizaje que se evalúa: **C = conceptual; P = Procedimental y A = Actitudinal**. Las siguientes tres columnas indican, en términos de porcentaje: la primera el **peso específico** asignado desde el programa de estudios para esa actividad; la segunda, **peso logrado**, es el nivel que el alumno alcanzó con base en las evidencias o desempeños demostrados; la tercera, **peso acumulado**, se refiere a la suma de los porcentajes alcanzados en las diversas actividades de evaluación y que deberá acumular a lo largo del ciclo escolar.

Otro elemento que complementa a la matriz de ponderación es la **rúbrica o matriz de valoración**, que establece los **indicadores y criterios** a considerar para evaluar, ya sea un producto, un desempeño o una actitud y la cual se explicará a continuación.

Una matriz de valoración o rúbrica es, como su nombre lo indica, una matriz de doble entrada en la cual se establecen, por un lado, los **indicadores** o aspectos específicos que se deben tomar en cuenta como **mínimo indispensable** para evaluar si se ha logrado el resultado de aprendizaje esperado y, por otro, los criterios o **niveles de calidad o satisfacción alcanzados**. En las celdas centrales se describen los criterios que se van a utilizar para evaluar esos indicadores, explicando cuáles son las características de cada uno.

Los criterios que se han establecido son: **Excelente**, en el cual, además de cumplir con los estándares o requisitos establecidos como necesarios en el logro del producto o desempeño, es propositivo, demuestra iniciativa y creatividad, o que va más allá de lo que se le solicita como mínimo, aportando elementos adicionales en pro del indicador; **Suficiente**, si cumple con los estándares o requisitos establecidos como necesarios para demostrar que se ha desempeñado adecuadamente en la actividad o elaboración del producto. Es en este nivel en el que podemos decir que se ha adquirido la competencia. **Insuficiente**, para cuando no cumple con los estándares o requisitos mínimos establecidos para el desempeño o producto.

Evaluación mediante la matriz de valoración o rúbrica

Un punto medular en esta metodología es que al alumno se le proporcione el **Plan de evaluación**, integrado por la **Tabla de ponderación y las Rúbricas**, con el fin de que pueda conocer qué se le va a solicitar y cuáles serán las características y niveles de calidad que deberá cumplir para demostrar que ha logrado los resultados de aprendizaje esperados. Asimismo, él tiene la posibilidad de autorregular su tiempo y esfuerzo para recuperar los aprendizajes no logrados.

Como se plantea en los programas de estudio, en una **sesión de clase previa a finalizar la unidad**, el PSP debe hacer una **sesión de recapitulación** con sus alumnos con el propósito de valorar si se lograron los resultados esperados; con esto se pretende que el alumno tenga la oportunidad, en caso de no lograrlos, de rehacer su evidencia, realizar actividades adicionales o repetir su desempeño nuevamente, con el fin de recuperarse de inmediato y no esperar hasta que finalice el ciclo escolar acumulando deficiencias que lo pudiesen llevar a no lograr finalmente la competencia del módulo y, por ende, no aprobarlo.

La matriz de valoración o rúbrica tiene asignadas a su vez valoraciones para cada indicador a evaluar, con lo que el PSP tendrá los elementos para evaluar objetivamente los productos o desempeños de sus alumnos. Dichas valoraciones están también vinculadas al SAE y a la matriz de ponderación. Cabe señalar que **el PSP no tendrá que realizar operaciones matemáticas para el registro de los resultados de sus alumnos**, simplemente deberá marcar en cada celda de la rúbrica aquélla que más se acerca a lo que realizó el alumno, ya sea en una hoja de cálculo que emite el SAE o bien, a través de la Web.

8. Tabla de ponderación

UNIDAD	RA	ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN	ASPECTOS A EVALUAR C	P	A	% Peso Específico	% Peso Logrado	% Peso Acumulado
1. Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades.	**1.1** Representa situaciones o fenómenos naturales y sociales de la vida cotidiana, en términos cuantitativos, empleando el conjunto de los números reales, imaginarios y complejos y la aplicación de sus operaciones básicas.	**1.1.1**	▲	▲	▲	10	10	10
	1.2 Resuelve problemas cotidianos, a partir de la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico.	**1.2.1**	▲	▲	▲	10	10	20
% PESO PARA LA UNIDAD						**20%**	**20%**	**20%**
2. Modelado matemático de problemas.	**2.1** Resuelve problemas de la vida cotidiana, aplicando operaciones aritméticas básicas, exponentes y radicales con expresiones algebraicas.	**2.1.1**	▲	▲	▲	10	10	30
	2.2 Representa y resuelve situaciones de su entorno, mediante la aplicación y desarrollo de productos notables, factorización y racionalización de expresiones algebraicas.	**2.2.1**	▲	▲	▲	10	10	40
% PESO PARA LA UNIDAD						**20%**	**20%**	**40%**
3. Manejo de operaciones con funciones algebraicas.	**3.1** Representa situaciones del entorno, empleando los conceptos de relación y función.	**3.1.1.**	▲	▲	▲	10	10	50
	3.2 Resuelve problemas reales, mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas.	**3.2.1**	▲	▲	▲	15	15	65
	3.3 Resuelve problemas reales, mediante funciones y ecuaciones cuadráticas.	**3.3.1**	▲	▲	▲	20	20	85
	3.4 Representa y resuelve situaciones de su entorno, empleando las operaciones básicas, la composición y la inversa de una función algebraica	**3.4.1.**	▲	▲	▲	15	15	100
% PESO PARA LA UNIDAD						**60%**	**60%**	**100%**
PESO TOTAL DEL MÓDULO						**100%**	**100%**	**100%**

9. Materiales para el desarrollo de actividades de evaluación

En blanco

10. Matriz de valoración ó rúbrica

MATRIZ DE VALORACIÓN Ó RÚBRICA

Siglema:-MAEC02	Nombre del módulo:	Manejo de espacios y cantidades	Nombre del alumno:		
PSP evaluador:			Grupo:	Fecha:	
Resultado de aprendizaje:	**1.1** Representa situaciones o fenómenos naturales y sociales de la vida cotidiana, en términos cuantitativos, empleando el conjunto de los números reales, imaginarios y complejos y la aplicación de sus operaciones básicas.		Actividad de evaluación:	**1.1.1** Resuelve la serie de ejercicios propuesta por el PSP, relativos a situaciones cotidianas y del entorno personal, familiar y social del alumno, aplicando el conjunto de los números reales, imaginarios y complejos.	

INDICADORES	%	C R I T E R I O S		
		Excelente	**Suficiente**	**Insuficiente**
Aplicación de números reales	**35%**	Resuelve individualmente al menos 4 de los 5 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, obteniendo el resultado esperado, aplicando las propiedades del conjunto de los números reales, empleando las herramientas matemáticas (operaciones y fórmulas) adecuadas para resolver los ejercicios, desarrollando a detalle el procedimiento seguido para llegar a la solución.	Resuelve individualmente al menos 4 de los 5 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, obteniendo el resultado esperado, aplicando las propiedades del conjunto de los números reales, empleando las herramientas matemáticas (operaciones y fórmulas) adecuadas para resolver los ejercicios.	Resuelve individualmente menos de 4 de los 5 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, o no obtiene el resultado esperado, o no aplica las propiedades del conjunto de los números reales, o no emplea las herramientas matemáticas (operaciones y fórmulas) adecuadas para resolver los ejercicios.
Aplicación de números complejos	**35%**	Resuelve individualmente al menos, 4 de los 5 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, obteniendo el resultado esperado, aplicando las propiedades del conjunto de los números complejos, empleando las herramientas matemáticas (operaciones y fórmulas) adecuadas para resolver los ejercicios, desarrollando a detalle el procedimiento seguido para llegar a la solución.	Resuelve individualmente al menos, 4 de los 5 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, obteniendo el resultado esperado, aplicando las propiedades del conjunto de los números complejos, empleando las herramientas matemáticas (operaciones y fórmulas) adecuadas para resolver los ejercicios.	Resuelve individualmente menos de 4 de los 5 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, o no obtiene el resultado esperado, o no aplica las propiedades del conjunto de los números complejos, o no emplea las herramientas matemáticas (operaciones y fórmulas) adecuadas para resolver los ejercicios.

INDICADORES	%	C R I T E R I O S		
		Excelente	**Suficiente**	**Insuficiente**
Serie de ejercicios resueltos	**30%**	Realiza la entrega de las series de ejercicios resueltos, considerando ortografía, orden, claridad, concisión y precisión de los procedimientos y métodos aplicados. Asimismo, en la organización del documento delimita cada serie y la inclusión de las operaciones realizadas, iniciando el documento con una página de portada donde aparece el nombre del módulo y los datos de la serie de ejercicios; cuidando aspectos de limpieza y presentación.	Realiza la entrega de las series de ejercicios resueltos, considerando ortografía, orden, claridad, concisión y precisión de los procedimientos y métodos aplicados. Asimismo, en la organización del documento delimita cada serie y la inclusión de las operaciones realizadas, iniciando el documento con una página de portada donde aparece el nombre del módulo y los datos de la serie de ejercicios.	No realiza la entrega de las series de ejercicios resueltos, o no considera ortografía, orden, claridad, concisión y precisión de los procedimientos y métodos aplicados; la organización del documento delimitando cada serie y la inclusión de las operaciones realizadas, iniciando el documento con una página de portada donde aparece el nombre del módulo y los datos de la serie de ejercicios.
	100%			

MATRIZ DE VALORACIÓN Ó RÚBRICA

Siglema:-MAEC02	Nombre del módulo:	Manejo de espacios y cantidades	Nombre del alumno:			
PSP evaluador:			Grupo:		Fecha:	
Resultado de aprendizaje:	**1.2** Resuelve problemas cotidianos, mediante la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico.		Actividad de evaluación:	**1.2.1** Traduce casos de la vida cotidiana del lenguaje común al lenguaje algebraico.		

INDICADORES	%	C R I T E R I O S		
		Excelente	**Suficiente**	**Insuficiente**
Traducción de lenguaje común a lenguaje algebraico.	**35%**	Traduce al menos 4 de los 5 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, realizando el análisis correspondiente; aplicando la metodología descrita por el PSP y complementando con comentarios de apoyo. Apoya a los compañeros que tengan duda en la resolución de los ejercicios.	Traduce al menos 4 de los 5 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, realizando el análisis correspondiente.	Traduce menos de 4 de los 5 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, o no realiza el análisis correspondiente.
Traducción de lenguaje algebraico a lenguaje común.	**35%**	Traduce al menos 4 de las 5 fórmulas propuestas por el PSP, consultando libros de física y química y realizando el análisis correspondiente; aplicando la metodología descrita por el PSP, y haciendo uso de otras herramientas de apoyo. Apoya a los compañeros que tengan duda en la resolución de los ejercicios.	Traduce al menos 4 de las 5 fórmulas propuestas por el PSP, consultando libros de física y química y realizando el análisis correspondiente.	Traduce menos de 4 de las 5 fórmulas propuestas por el PSP, o no consulta libros de física y química o no realiza el análisis correspondiente.

INDICADORES	%	C R I T E R I O S		
		Excelente	**Suficiente**	**Insuficiente**
Informe de actividad desarrollada.	**30%**	Realiza la entrega de las series de traducciones resueltas, considerando ortografía, orden, claridad, concisión y precisión de los procedimientos y métodos aplicados. Asimismo, en la organización del documento delimita cada serie, iniciando el documento con una página de portada donde aparece el nombre del módulo y los datos de la actividad realizada; incorporando aspectos de limpieza y presentación.	Realiza la entrega de las series de traducciones resueltas, considerando ortografía, orden, claridad, concisión y precisión de los procedimientos y métodos aplicados. Asimismo, en la organización del documento delimita cada serie, iniciando el documento con una página de portada donde aparece el nombre del módulo y los datos de la actividad realizada.	No realiza la entrega de las series de traducciones resueltas, o no considera ortografía, orden, claridad, concisión y precisión de los procedimientos y métodos aplicados; la organización del documento delimitando cada serie, iniciando el documento con una página de portada donde aparece el nombre del módulo y los datos de la actividad realizada.
	100%			

MATRIZ DE VALORACIÓN Ó RÚBRICA

Siglema:-MAEC02	Nombre del módulo:	Manejo de espacios y cantidades	Nombre del alumno:			
PSP evaluador:			Grupo:		Fecha:	
Resultado de aprendizaje:	**2.1** Resuelve problemas de la vida cotidiana, aplicando operaciones aritméticas básicas, exponentes y radicales con expresiones algebraicas.		Actividad de evaluación:	**2.1.1** Resuelve la serie de ejercicios propuesta por el PSP, relativos a situaciones cotidianas y del entorno personal, familiar y social del alumno, aplicando operaciones aritméticas básicas, exponentes y radicales con expresiones algebraicas.		

INDICADORES	%	C R I T E R I O S		
		Excelente	**Suficiente**	**Insuficiente**
Aplicación de exponentes en expresiones algebraicas.	**35%**	Resuelve individualmente, al menos 4 de los 5 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, obteniendo el resultado esperado, aplicando expresiones algebraicas con exponentes e incorporando una representación gráfica para mayor comprensión.	Resuelve individualmente, al menos 4 de los 5 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, obteniendo el resultado esperado, aplicando expresiones algebraicas con exponentes.	Resuelve individualmente, menos de 4 de los 5 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, o no obtiene el resultado esperado, aplicando expresiones algebraicas con exponentes.
Aplicación de radicales en expresiones algebraicas.	**35%**	Resuelve individualmente, al menos, 4 de los 5 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, obteniendo el resultado esperado, aplicando expresiones algebraicas con radicales, e incorporando una representación gráfica para mayor comprensión.	Resuelve individualmente, al menos, 4 de los 5 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, obteniendo el resultado esperado, aplicando expresiones algebraicas con radicales.	Resuelve individualmente, menos de 4 de los 5 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, o no obtiene el resultado esperado, aplicando expresiones algebraicas con radicales.

INDICADORES	%	C R I T E R I O S		
		Excelente	**Suficiente**	**Insuficiente**
Serie de ejercicios resueltos.	**30%**	Realiza la entrega de las series de ejercicios resueltos, considerando ortografía, orden, claridad, concisión y precisión de los procedimientos y métodos aplicados; la organización del documento delimitando cada serie y la inclusión de las operaciones realizadas, iniciando el documento con una página de portada donde aparece el nombre del módulo y los datos de la serie de ejercicios; incorporando aspectos de limpieza y presentación.	Realiza la entrega de las series de ejercicios resueltos, considerando ortografía, orden, claridad, concisión y precisión de los procedimientos y métodos aplicados; la organización del documento delimitando cada serie y la inclusión de las operaciones realizadas, iniciando el documento con una página de portada donde aparece el nombre del módulo y los datos de la serie de ejercicios.	No realiza la entrega de las series de ejercicios resueltos, o no considera ortografía, orden, claridad, concisión y precisión de los procedimientos y métodos aplicados; la organización del documento delimitando cada serie y la inclusión de las operaciones realizadas, iniciando el documento con una página de portada donde aparece el nombre del módulo y los datos de la serie de ejercicios.
	100%			

MATRIZ DE VALORACIÓN Ó RÚBRICA

Siglema:-MAEC02	Nombre del módulo:	Manejo de espacios y cantidades	Nombre del alumno:		
PSP evaluador:			Grupo:	Fecha:	
Resultado de aprendizaje:	**2.2.** Representa y resuelve situaciones de su entorno, mediante la aplicación y desarrollo de productos notables, factorización y racionalización de expresiones algebraicas.		Actividad de evaluación:	**2.2.1** Resuelve la serie de ejercicios propuesta por el PSP, relativos a situaciones cotidianas y del entorno personal, familiar y social del alumno, aplicando productos notables, factorización y racionalización de expresiones algebraicas.	

INDICADORES	%	C R I T E R I O S		
		Excelente	**Suficiente**	**Insuficiente**
Aplicación de productos notables.	**30%**	Resuelve individualmente, al menos 4 de los 5 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, obteniendo el resultado esperado, aplicando productos notables y señalando a que producto se remite la solución de cada ejercicio.	Resuelve individualmente, al menos 4 de los 5 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, obteniendo el resultado esperado, aplicando productos notables.	Resuelve individualmente, menos de 4 de los 5 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, o no obtiene el resultado esperado, aplicando productos notables.
Aplicación de factorización.	**30%**	Resuelve individualmente, al menos 4 de los 5 ejercicios de cada una de las series propuestas por el PSP, obteniendo el resultado esperado, aplicando los distintos métodos de factorización y señalando a que método se remite la solución de cada ejercicio.	Resuelve individualmente, al menos 4 de los 5 ejercicios de cada una de las series propuestas por el PSP, obteniendo el resultado esperado, aplicando los distintos métodos de factorización.	Resuelve individualmente, menos de 4 de los 5 ejercicios de cada una de las series propuestas por el PSP, o no obtiene el resultado esperado, aplicando los distintos métodos de factorización.

INDICADORES	%	C R I T E R I O S		
		Excelente	**Suficiente**	**Insuficiente**
Aplicación de racionalización.	**20%**	Resuelve individualmente, al menos, 2 de los 3 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, obteniendo el resultado esperado, aplicando racionalización de expresiones algebraicas y señalando los aspectos relevantes de la solución de cada ejercicio.	Resuelve individualmente, al menos 2 de los 3 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, obteniendo el resultado esperado, aplicando racionalización de expresiones algebraicas.	Resuelve individualmente, menos de 2 de los 3 ejercicios de la serie propuesta por el PSP, o no obtiene el resultado esperado, aplicando racionalización de expresiones algebraicas.
Serie de ejercicios resueltos.	**20%**	Realiza la entrega de las series de ejercicios resueltos, considerando ortografía, orden, claridad, concisión y precisión de los procedimientos y métodos aplicados; la organización del documento delimitando cada serie y la inclusión de las operaciones realizadas, iniciando el documento con una página de portada donde aparece el nombre del módulo y los datos de la serie de ejercicios; incorporando aspectos de limpieza y presentación.	Realiza la entrega de las series de ejercicios resueltos, considerando ortografía, orden, claridad, concisión y precisión de los procedimientos y métodos aplicados; la organización del documento delimitando cada serie y la inclusión de las operaciones realizadas, iniciando el documento con una página de portada donde aparece el nombre del módulo y los datos de la serie de ejercicios.	No realiza la entrega de las series de ejercicios resueltos, o no considera ortografía, orden, claridad, concisión y precisión de los procedimientos y métodos aplicados; la organización del documento delimitando cada serie y la inclusión de las operaciones realizadas, iniciando el documento con una página de portada donde aparece el nombre del módulo y los datos de la serie de ejercicios.
	100%			

MATRIZ DE VALORACIÓN Ó RÚBRICA

Siglema:-MAEC02	Nombre del módulo:	Manejo de espacios y cantidades	Nombre del alumno:		
PSP evaluador:			Grupo:		Fecha:
Resultado de aprendizaje:	**3.1** Representa situaciones del entorno, empleando los conceptos de relación y función.		Actividad de evaluación:	**3.1.1** Modela situaciones de la vida cotidiana empleando representaciones de relaciones y funciones	

INDICADORES	%	C R I T E R I O S		
		Excelente	Suficiente	Insuficiente
Variables	**40%**	Identifica las variables dentro del problema o situación de la vida cotidiana y la relación entre éstas, argumentando el proceso realizado.	Identifica las variables dentro del problema o situación de la vida cotidiana y la relación entre éstas.	No identifica las variables dentro del problema o situación de la vida cotidiana o las identifica de manera parcial.
Elementos del modelo	**30%**	Los elementos del modelo formulado concuerdan con la realidad, y presenta dos problemáticas distintas que tengan la misma estructura	Los elementos del modelo formulado concuerdan con la realidad	Los elementos del modelo formulado concuerdan parcialmente con la realidad
Resultados	**30%**	Interpreta los resultados del problema o situación que formuló a través del modelo, explicando su correspondencia en lenguaje cotidiano. La entrega de la formulación del modelo se hace de acuerdo a los parámetros marcados por el PSP y se entrega antes de la fecha establecida para ello.	Interpreta los resultados del problema o situación que formuló a través del modelo, explicando su correspondencia en lenguaje cotidiano. La entrega de la formulación del problema se hace en tiempo.	No interpreta los resultados del problema o situación que formuló a través del modelo.
	100%			

MATRIZ DE VALORACIÓN Ó RÚBRICA

Siglema:-MAEC02	Nombre del módulo:	Manejo de espacios y cantidades	Nombre del alumno:		
PSP evaluador:			Grupo:		Fecha:
Resultado de aprendizaje:	**3.2** Resuelve problemas reales, mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas.		Actividad de evaluación:	**3.2.1** Resuelve una serie de ejercicios propuesta por el PSP, relativos a situaciones cotidianas y del entorno personal, familiar y social del alumno, aplicando métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas.	

INDICADORES	%	C R I T E R I O S		
		Excelente	**Suficiente**	**Insuficiente**
Aplicación de sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.	**35%**	Resuelve individualmente, al menos 4 de la serie de 5 ejercicios, propuestos por el PSP, aplicando métodos de solución de sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, planteando el sistema de ecuaciones que representa al problema, realizando las operaciones necesarias para tener un sistema equivalente y finalmente, comprobando sus resultados.	Resuelve individualmente, al menos 4 de la serie de 5 ejercicios, propuestos por el PSP, aplicando métodos de solución de sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, planteando el sistema de ecuaciones que representa al problema, realizando las operaciones necesarias para tener un sistema equivalente.	Resuelve individualmente, menos de 4 de la serie de 5 ejercicios, propuestos por el PSP, o no aplica los métodos de solución de sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, planteando el sistema de ecuaciones que representa al problema, realizando las operaciones necesarias para tener un sistema equivalente.
Aplicación de sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.	**35%**	Resuelve individualmente, al menos 4 de la serie de 5 ejercicios, propuestos por el PSP, aplicando métodos de solución de sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, planteando el sistema de ecuaciones que representa al problema, realizando las operaciones necesarias para tener un sistema equivalente, comprobando sus resultados.	Resuelve individualmente, al menos 4 de la serie de 5 ejercicios, propuestos por el PSP, aplicando métodos de solución de sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, planteando el sistema de ecuaciones que representa al problema, realizando las operaciones necesarias para tener un sistema equivalente.	Resuelve individualmente, al menos 4 de la serie de 5 ejercicios, propuestos por el PSP, aplicando métodos de solución de sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, planteando el sistema de ecuaciones que representa al problema, realizando las operaciones necesarias para tener un sistema equivalente.

INDICADORES	%	C R I T E R I O S		
		Excelente	**Suficiente**	**Insuficiente**
Serie de ejercicios resueltos.	**30%**	Realiza la entrega de las series de ejercicios resueltos, considerando ortografía, orden, claridad, concisión y precisión de los procedimientos y métodos aplicados; la organización del documento delimitando cada serie y la inclusión de las operaciones realizadas, iniciando el documento con una página de portada donde aparece el nombre del módulo y los datos de la serie de ejercicios; incorporando aspectos de limpieza y presentación.	Realiza la entrega de las series de ejercicios resueltos, considerando ortografía, orden, claridad, concisión y precisión de los procedimientos y métodos aplicados; la organización del documento delimitando cada serie y la inclusión de las operaciones realizadas, iniciando el documento con una página de portada donde aparece el nombre del módulo y los datos de la serie de ejercicios.	Realiza la entrega de las series de ejercicios resueltos, considerando ortografía, orden, claridad, concisión y precisión de los procedimientos y métodos aplicados; la organización del documento delimitando cada serie y la inclusión de las operaciones realizadas, iniciando el documento con una página de portada donde aparece el nombre del módulo y los datos de la serie de ejercicios.
	100%			

MATRIZ DE VALORACIÓN Ó RÚBRICA

Siglema:-MAEC02	Nombre del módulo:	Manejo de espacios y cantidades		Nombre del alumno:		
PSP evaluador:			Grupo:		Fecha:	
Resultado de aprendizaje:	**3.3** Resuelve problemas reales, mediante funciones y ecuaciones cuadráticas.	Actividad de evaluación:	**3.3.1** Resuelve una serie de ejercicios propuesta por el PSP, relativos a situaciones cotidianas y del entorno personal, familiar y social del alumno, aplicando funciones y ecuaciones cuadráticas.			

INDICADORES	**%**	**C R I T E R I O S**		
		Excelente	**Suficiente**	**Insuficiente**
Aplicación de ecuación cuadrática	**70%**	Resuelve individualmente, al menos 4 de la serie de 5 ejercicios, propuestos por el PSP, aplicando métodos de solución de ecuaciones cuadráticas, eligiendo la incógnita que va a representar la cantidad que se desea calcular, identificando la relación que existe entre los datos y la incógnita, planteando la ecuación que represente tal relación, resolviendo la ecuación por alguno de los métodos vistos, expresando la solución del problema y finalmente comprobando los resultados obtenidos.	Resuelve individualmente, al menos 4 de la serie de 5 ejercicios, propuestos por el PSP, aplicando métodos de solución de ecuaciones cuadráticas, eligiendo la incógnita que va a representar la cantidad que se desea calcular, identificando la relación que existe entre los datos y la incógnita, planteando la ecuación que represente tal relación, resolviendo la ecuación por alguno de los métodos vistos, expresando la solución del problema.	Resuelve individualmente, menos 4 de la serie de 5 ejercicios, propuestos por el PSP, o no aplica los métodos de solución de ecuaciones cuadráticas, eligiendo la incógnita que va a representar la cantidad que se desea calcular, identificando la relación que existe entre los datos y la incógnita, planteando la ecuación que represente tal relación, resolviendo la ecuación por alguno de los métodos vistos, expresando la solución del problema.
Serie de ejercicios resueltos.	**30%**	Realiza la entrega de la serie de ejercicios resueltos, considerando ortografía, orden, claridad, concisión y precisión de los procedimientos y métodos aplicados; la organización del documento delimitando cada serie y la inclusión de las operaciones realizadas, iniciando el documento con una página de portada donde aparece el nombre del módulo y los datos de la serie de ejercicios; incorporando aspectos de limpieza y presentación.	Realiza la entrega de la serie de ejercicios resueltos, considerando ortografía, orden, claridad, concisión y precisión de los procedimientos y métodos aplicados; la organización del documento delimitando cada serie y la inclusión de las operaciones realizadas, iniciando el documento con una página de portada donde aparece el nombre del módulo y los datos de la serie de ejercicios.	No realiza la entrega de la serie de ejercicios resueltos, o no considera ortografía, orden, claridad, concisión y precisión de los procedimientos y métodos aplicados; la organización del documento delimitando cada serie y la inclusión de las operaciones realizadas, iniciando el documento con una página de portada donde aparece el nombre del módulo y los datos de la serie de ejercicios.
	100%			

MATRIZ DE VALORACIÓN Ó RÚBRICA

Siglema:-MAEC02	Nombre del módulo:	Manejo de espacios y cantidades	Nombre del alumno:			
PSP evaluador:			Grupo:		Fecha:	
Resultado de aprendizaje:	**3.4** Representa y resuelve situaciones de su entorno, empleando las operaciones básicas, la composición y la inversa de una función algebraica.		Actividad de evaluación:	**3.4.1** Resuelve situaciones cotidianas propuestas por el PSP, que involucren el uso de la composición y la inversa defunciones		

INDICADORES	%	CRITERIOS		
		Excelente	**Suficiente**	**Insuficiente**
Procedimientos y notación simbólica	**50%**	Realiza la aplicación técnica rigurosa de los conceptos, procedimientos y notación simbólica utilizados, integrando una explicación del proceso seguido en el desarrollo paso a paso.	Realiza la aplicación técnica de los conceptos, procedimientos y notación simbólica utilizados, sin errores	Aplicación técnica de los conceptos, procedimientos y notación simbólica utilizado, pero con errores..
Interpretación de los resultados	**50%**	Realiza una interpretación de los resultados obtenidos, por lo que puede explicarlos y dar la respuesta a la pregunta planteada. Recurre a un lenguaje sencillo y detallado. Agrega un ejemplo de otro problema de la vida cotidiana, que pueda ser resuelto a través del mismo procedimiento.	Realiza una interpretación de los resultados obtenidos, por lo que puede explicarlos y dar la respuesta a la pregunta planteada. Recurre a un lenguaje sencillo y detallado.	No realiza una interpretación de los resultados obtenidos, por lo que no puede explicarlos y dar la respuesta a la pregunta planteada.
	100%			